

FI – Matematiikka, pitkä oppimäärä

22.3.2023

Koe koostuu 13 tehtävästä, joista vastataan kymmeneen. Tehtävät on jaettu kolmeen osaan. A-osassa on neljä kaikille pakollista tehtävää. B1-osassa on viisi tehtävää, joista vastataan kolmeen. B2-osassa on neljä tehtävää, joista vastataan kolmeen. Kaikki tehtävät arvostellaan pistein 0–12, joten kokeen maksimipistemäärä on 120.

A-osassa saat käyttää koejärjestelmässä olevaa taulukkokirjaa ja perusohjelmia. A-osa palautetaan tehtävän 4 jälkeen olevalla painikkeella. Tämän jälkeen A-osan vastauksia ei voi enää muokata. A-osan palauttamisen jälkeen kaikki koejärjestelmän ohjelmat ovat käytettävissäsi. Voit vastata B-osien tehtäviin myös ennen A-osan palauttamista.

Useimmissa tehtävissä kaikkien osatehtävien vastaukset kirjoitetaan samaan vastauskenttään. Jaottele vastauksesi osatehtävien mukaisesti. Halutessasi voit tuottaa vastausten tueksi piirroksia, kaavioita tai taulukoita ja liittää niistä kuvakaappauksen mihin tahansa tekstivastaukseen.

Älä jätä mitään merkintöjä sellaisen tehtävän vastaukselle varattuun tilaan, jota et halua jättää arvosteltavaksi.

Sisällys

A-osa

Vastaa neljään tehtävään.

- | | | |
|---------------------------------------|----------|-------|
| 1. Monivalintatehtävä | | 12 p. |
| 2. Yhdistely | Aineisto | 12 p. |
| 3. Ratakisko | Aineisto | 12 p. |
| 4. Suoran etäisyys kahdesta pisteestä | | 12 p. |

B1-osa

Vastaa kolmeen tehtävään.

- | | | |
|------------------------|----------|-------|
| 5. Taikaneliö | Aineisto | 12 p. |
| 6. Raketin nokkakartio | | 12 p. |
| 7. Vektoreiden summa | | 12 p. |
| 8. Polynomien vertailu | | 12 p. |
| 9. Integraalialgoritmi | Aineisto | 12 p. |

B2-osa

Vastaa kolmeen tehtävään.

- | | | |
|---|----------|-------|
| 10. Positroniemissiotomografia | Aineisto | 12 p. |
| 11. Nopanheiton opetus | | 12 p. |
| 12. Polynomikonstruktio | | 12 p. |
| 13. Integraalin ja raja-arvon järjestyksen vaihto | | 12 p. |

Koe yhteensä

B1-osa: Vastaa kolmeen tehtävään.
B2-osa: Vastaa kolmeen tehtävään.

A-osa

i Vastaa neljään tehtävään.

A-osa palautettu

B1-osa

i Vastaa kolmeen tehtävään.

5. Taikaneliö 12 p.

Aineisto

5.A Kuva: Taikaneliö

Kuparikaiverrus Melankolia I (katso kuva 5.A) on saksalaisen Albrecht Dürerin tunnetuimpia teoksia. Teos sisältää 4×4 -taikaneliön, jossa jokaisen vaaka- ja pystyrivin lukujen summa on **34**. Alla olevassa ruudukossa neljä taikaneliön ruutua on esitetty kahden tuntemattoman luvun x ja y avulla. Kun luvut x ja y asetetaan peräkkäin, saadaan tuloksena teoksen valmistumisvuosi. Ratkaise luvut x ja y ja kirjoita kyseessä oleva vuosiluku.

16	3	2	13
5	10	11	8
9	$\frac{y-2}{2}$	$\frac{x-1}{2}$	12
4	x	y	1

Ratkaisin taikaneliön ongelman käyttämällä algebraa. Tiedämme, että jokaisen rivin ja sarakkeen summan pitää olla 34. Tässä neliössä on kaksi tuntematonta arvoa, $\backslash(x\backslash)$ ja $\backslash(y\backslash)$, ja näiden arvojen löytämiseksi asetin yhtälöt kolmannelle ja neljännelle riville sekä toiselle sarakkeelle.

- Kolmas rivi: $\backslash(9 + \frac{y-2}{2} + \frac{x-1}{2} + 12 = 34\backslash)$
- Neljäs rivi: $\backslash(4 + x + y + 1 = 34\backslash)$
- Toinen sarake: $\backslash(3 + 10 + \frac{y-2}{2} + x = 34\backslash)$

Ratkaisin nämä yhtälöt ja sain tulokseksi $\backslash(x = 15\backslash)$ ja $\backslash(y = 14\backslash)$. Kun asetetaan nämä luvut peräkkäin, saadaan vuosiluku 1514, joka on Albrecht Dürerin teoksen "Melankolia I" valmistumisvuosi.

Vastauksen pituus: 535 merkkiä.

6. Raketin nokkakartio 12 p.

Erään raketin kärki, eli niin sanottu nokkakartio, saadaan, kun alaspäin aukeava paraabeli pyörittää symmetria-akselinsa ympäri. Kärjen korkeus on 4,5 metriä, ja sen halkaisija pohjan tasolla on 3,3 metriä. Määritä k

B1-osa: Vastaa kolmeen tehtävään.
B2-osa: Vastaa kolmeen tehtävään.

Raketin nokkakartion, joka muodostuu paraabelin pyörähtäessä symmetria-akselinsa ympäri, tilavuuden laskeminen edellyttää nokkakartion mittausten huomioimista. Tässä tapauksessa korkeus on 4,5 metriä ja halkaisija pohjassa 3,3 metriä. Kun paraabelin pyörähdysmuoto on nokkakartio, sen tilavuus voidaan laskea käyttämällä paraabelin yhtälön ja pyörähdyskappaleen tilavuuden laskukaavaa.

Paraabelin yhtälö, joka kuvaa nokkakartion muotoa, on yleensä muotoa ($y = ax^2 + bx + c$). Tässä tapauksessa tarvitsemme yhtälön, joka kuvaa paraabelia, jonka huippu on origossa (0,0) ja joka aukeaa alaspäin. Tällöin yhtälö on muotoa ($y = -ax^2$), missä (a) on positiivinen vakio. Tämän vakion (a) arvon voimme määrittää käyttämällä annettuja mittoja.

Paraabelin leveys pohjassa (halkaisija) on 3,3 metriä, joten sen säde on 1,65 metriä. Tämä tarkoittaa, että kun ($x = 1,65$), (y) on -4,5 (korkeus on 4,5 metriä, mutta koska paraabeli aukeaa alaspäin, arvo on negatiivinen). Näillä tiedoilla voimme ratkaista (a):n arvon ja sen jälkeen laskea nokkakartion tilavuuden.

Aloitetaan ratkaisemalla (a) ja sitten lasketaan nokkakartion tilavuus.

Paraabelin yhtälön vakio (a) on noin 1.653. Nyt kun meillä on tämä arvo, voimme laskea nokkakartion tilavuuden.

Nokkakartion tilavuus (V) kun paraabeli pyörähtää ympäri, voidaan laskea integroimalla paraabelin yhtälöä pitkin pyörähdysakselia (tässä tapauksessa y-akselia). Integroimalla saamme tilavuudeksi ($V = \pi \int_0^h r(y)^2 dy$), missä ($r(y)$) on säteen arvo korkeudella (y) ja (h) on kokonaiskorkeus.

Tässä tapauksessa ($r(y) = \sqrt{\frac{-y}{a}}$) ja ($h = 4.5$) metriä. Lasketaan tilavuus tämän kaavan avulla. ... Näyttää siltä, että laskennassani on virhe, koska tilavuuden ei pitäisi olla negatiivinen. Tarkistetaan ja korjataan laskenta.

Paraabelin pyörähdysmuodostaman nokkakartion tilavuuden laskemiseksi tulisi käyttää kaavaa ($V = \pi \int_0^h r(y)^2 dy$), missä ($r(y)$) on säde korkeudella (y) ja (h) on kartion korkeus. Tässä tapauksessa ($r(y)$) voidaan ilmaista paraabelin yhtälön avulla, joka on muodossa ($y = -ax^2$), missä (a) on laskettu arvo ja (x) on säde. Täten ($r(y) = \sqrt{\frac{-y}{a}}$). Korjataan laskelma tällä pohjalta.

Raketin nokkakartion tilavuus on noin 19.24 kuutiometriä. Tämä laskelma perustuu paraabelin yhtälöön, joka pyörähtää symmetria-akselinsa ympäri, ottaen huomioon annetut mitat: korkeus 4,5 metriä ja halkaisija pohjassa 3,3 metriä.

Vastauksen pituus: 2079 merkkiä.

7. Vektoreiden summa 12 p.

Tarkastellaan vektoreita $\vec{u} = \vec{i} + 2\vec{j}$ ja $\vec{v} = \sin(2t)\vec{i} + \cos(4t)\vec{j}$, missä $t \geq 0$.

- Määritä vektori $\vec{u} + \vec{v}$, kun $t = 0$, $t = \frac{\pi}{4}$ ja $t = \frac{3\pi}{4}$. (4 p.)
- Mikä tasokuvio muodostuu vektorin $\vec{u} + \vec{v}$ kärkipisteestä, kun t saa arvot välillä $[0, \pi]$? Anna vastaus yhtälönä muodossa $y = f(x)$. Ratkaisussa voi käyttää esimerkiksi kaavaa $\cos(2x) = 1 - 2\sin^2 x$. (8 p.)

Vektorien summan määrittäminen tapahtuu summaamalla vastaavat komponentit. Annetaan vektorit:

$$\vec{u} = \vec{i} + 2\vec{j}$$

$$\vec{v} = \sin(2t)\vec{i} + \cos(4t)\vec{j}$$

Näiden summa $\vec{u} + \vec{v}$ on siis:

B1-osa: Vastaa kolmeen tehtävään.
B2-osa: Vastaa kolmeen tehtävään.

$$\begin{aligned}\overline{u} + \overline{v} &= (\overline{i} + \sin(2t)\overline{i}) + (2\overline{j} + \cos(4t)\overline{j}) \\ &= (1 + \sin(2t))\overline{i} + (2 + \cos(4t))\overline{j}\end{aligned}$$

Tässä (t) on parametri, jonka arvo vaihtelee. Laskekaamme tämä kun $(t = 0)$, $(t = \frac{\pi}{4})$ ja $(t = \frac{3\pi}{4})$.

1. Kun $(t = 0)$:

$$\sin(2 \times 0) = 0$$

$$\cos(4 \times 0) = 1$$

$$\overline{u} + \overline{v} = (1 + 0)\overline{i} + (2 + 1)\overline{j} = \overline{i} + 3\overline{j}$$

2. Kun $(t = \frac{\pi}{4})$:

$$\sin(2 \times \frac{\pi}{4}) = \sin(\frac{\pi}{2}) = 1$$

$$\cos(4 \times \frac{\pi}{4}) = \cos(\pi) = -1$$

$$\overline{u} + \overline{v} = (1 + 1)\overline{i} + (2 - 1)\overline{j} = 2\overline{i} + \overline{j}$$

3. Kun $(t = \frac{3\pi}{4})$:

$$\sin(2 \times \frac{3\pi}{4}) = \sin(\frac{3\pi}{2}) = -1$$

$$\cos(4 \times \frac{3\pi}{4}) = \cos(3\pi) = -1$$

$$\overline{u} + \overline{v} = (1 - 1)\overline{i} + (2 - 1)\overline{j} = \overline{j}$$

Seuraavaksi, kun tarkastellaan vektorin $(\overline{u} + \overline{v})$ kärkipistettä välillä $(t \in [0, \pi])$, saamme tasokuvion yhtälön. Tämä yhtälö voidaan määrittää kärkipisteen (x, y) koordinaateista, jotka ovat $(x = 1 + \sin(2t))$ ja $(y = 2 + \cos(4t))$. Välillä $(0 \leq t \leq \pi)$, funktiot $(\sin(2t))$ ja $(\cos(4t))$ saavat kaikki arvonsa väliltä -1 ja 1 . Yhtälö voidaan muodostaa yhdistämällä nämä funktiot, mutta se vaatii yleensä trigonometristen identiteettien käyttöä, kuten $(\cos(2x) = 1 - 2\sin^2(x))$. Tarkka yhtälö voi kuitenkin olla monimutkainen ja riippuu siitä, miten haluat yhdistää nämä funktiot. Yksi tapa on ilmaista toinen funktio toisen avulla, mutta tässä tapauksessa se ei ole suoraviivaista johtuen erilaisista taajuuksista $(\sin(2t))$ ja $(\cos(4t))$.

Yleensä, tällaisen yhtälön löytäminen vaatii jonkinlaista luovaa matemaattista ajattelua ja tunnistamista, miten näitä funktioita voidaan yhdistää. Vaihtoehtoisesti, voit harkita parametrin yhtälön käyttöä tai piirtää kuviota numeerisesti tarkastelemalla (x) ja (y) arvoja eri (t) :n arvoille.

Kysymys 2 koskee tasokuvion muodostumista vektorin $\overline{u} + \overline{v}$ kärkipisteestä, kun t saa arvot välillä $[0, \pi]$. Olemme jo aiemmin määrittäneet, että vektorin $\overline{u} + \overline{v}$ komponentit ovat $(1 + \sin(2t))\overline{i} + (2 + \cos(4t))\overline{j}$. Tästä saamme x - ja y -koordinaatit:

$$x = 1 + \sin(2t)$$

$$y = 2 + \cos(4t)$$

Nyt meidän on muodostettava näistä yhtälö $y = f(x)$. Tämä voidaan tehdä käyttämällä trigonometrisia identiteettejä. Käytämme tässä identiteettiä $\cos(2x) = 1 - 2\sin^2(x)$, mikä auttaa meitä yhdistämään x :n ja y :n. Asetetaan $2x = 4t$, jolloin $x = 2t$ ja $\sin(2t) = 1 - \cos(2t)$. Tästä saamme $2\sin^2(t) = 1 - \cos(2t)$.

Koska $x = 1 + \sin(2t)$, meillä on $\sin(2t) = x - 1$. Tästä saamme $2\sin^2(t) = 1 - \cos(2t) = 1 - \cos(4t)$.

Vaihdetaan tämä yhtälöön $y = 2 + \cos(4t)$ ja ratkaistaan yhtälö $y = f(x)$:

$$y = 2 + \cos(4t) = 2 + 1 - 2\sin^2(2t) = 3 - 2(x - 1)^2$$

Tässä $y = 3 - 2(x - 1)^2$ on yhtälö, joka kuvaa kärkipisteen muodostamaa kuviota x -

B1-osa: Vastaa kolmeen tehtävään.
B2-osa: Vastaa kolmeen tehtävään.

$[0, \pi][0, \pi]$.

Vastauksen pituus: 2995 merkkiä.

8. Polynomien vertailu 12 p.

1. Osoita induktiolla, että $k^3 \geq k^2 + 4$ kaikilla kokonaisluvulla $k \geq 2$. (6 p.)
2. Osoita, että osatehtävän 8.1 epäyhtälö ei päde millään kokonaisluvulla $k < 0$. (2 p.)
3. Osoita, että epäyhtälö $x^3 \geq x^2 + 4$ pätee kaikilla reaaliluvulla $x \geq 2$. (4 p.)

8.1 Matemaattinen induktio

Halutaan osoittaa, että $\forall (k^3 \geq k^2 + 4)$ kaikilla kokonaisluvulla $\forall (k \geq 2)$.

Induktion alkuaskel:

Tarkistetaan väite kun $\forall (k = 2)$:

$$\forall [2^3 = 8 \geq 2^2 + 4 = 8]$$

Väite pätee alkuarvolla $\forall (k = 2)$.

Induktion perusaskel:

Oletetaan, että väite $\forall (k^3 \geq k^2 + 4)$ pätee jollakin kiinteällä kokonaisluvulla $\forall (k)$, joka on suurempi tai yhtä suuri kuin 2. Tämä on induktio-oletus.

Induktion induktioaskel:

Osoitetaan, että väite pätee myös seuraavalle kokonaisluvulle $\forall (k+1)$:

$$\forall [(k+1)^3 = k^3 + 3k^2 + 3k + 1]$$

Käytämme induktio-oletusta $\forall (k^3 \geq k^2 + 4)$:

$$\forall [k^3 + 3k^2 + 3k + 1 \geq (k^2 + 4) + 3k^2 + 3k + 1]$$

Yksinkertaistetaan yhtälöä:

$$\forall [k^3 + 3k^2 + 3k + 1 \geq 4k^2 + 3k + 5]$$

Koska $\forall (k \geq 2)$, niin $\forall (k^2)$ on aina suurempi kuin $\forall (k)$ (koska $\forall (k \cdot k > k \cdot 1)$), ja siitä seuraa, että $\forall (3k^2)$ on suurempi kuin $\forall (3k)$. Tämä tarkoittaa, että:

$$\forall [$$

B1-osa: Vastaa kolmeen tehtävään.
B2-osa: Vastaa kolmeen tehtävään.

$$4k^2 + 3k + 5 \leq k^2 + 3k^2 + 3k + 1$$

$$\vee$$

Näin ollen:

$$\vee$$

$$(k+1)^3 \geq (k+1)^2 + 4$$

$$\vee$$

Olemme osoittaneet, että jos väite pätee kokonaisluvulle $\vee(k)$, niin se pätee myös kokonaisluvulle $\vee(k+1)$. Täten matemaattisen induktion periaatteen mukaan väite $\vee(k^3 \geq k^2 + 4)$ pätee kaikille kokonaisluvuille $\vee(k \geq 2)$.

8.2 Epäyhtälön pätemättömyys kun $\vee(k < 0)$

Tarkastellaan epäyhtälöä $\vee(k^3 < k^2 + 4)$ kun $\vee(k < 0)$. Koska $\vee(k)$ on negatiivinen, $\vee(k^3)$ on negatiivinen, mutta $\vee(k^2)$ on positiivinen ja $\vee(k^2 + 4)$ on sitäkin suurempi positiivinen luku. Siis $\vee(k^3)$ on aina pienempi kuin $\vee(k^2 + 4)$ kun $\vee(k)$ on negatiivinen, joka osoittaa epäyhtälön pätemättömyyden negatiivisille kokonaisluvuille.

8.3 Epäyhtälön päteminen kaikilla reaaliluvuilla $\vee(x \geq 2)$

Lopuksi, osoitamme, että $\vee(x^3 \geq x^2 + 4)$ kaikilla reaaliluvuilla $\vee(x \geq 2)$.

Tämä voidaan osoittaa olettamalla, että $\vee(x)$ on reaaliluku ja $\vee(x \geq 2)$, ja sitten tutkimalla funktion $\vee(f(x) = x^3 - x^2 - 4)$ käyttäytymistä. Jos voimme osoittaa, että $\vee(f(x))$ on positiivinen tai nolla, kun $\vee(x \geq 2)$, olemme osoittaneet väitteen todeksi.

Tätä osaa varten tarvitsemme funktion $\vee(f(x))$ ensimmäisen ja toisen derivaatan tutkimista, jotta näemme funktion käytöksen ja sen, missä funktion minimipisteet ovat. Koska $\vee(f(x))$ on polynomifunktio, sen jatkuvuus ja derivoituvuus kaikkialla reaalilukujen alueella tarkoittaa, että voimme käyttää derivaattoja sen ääriarvojen tutkimiseen.

Aloitin laskemalla derivaatan ja tutkimalla funktion käytöstä. Jatketaan nyt analyysiä funktiolle $\vee(f(x) = x^3 - x^2 - 4)$.

Ensimmäinen derivaatta:

$$\vee[f'(x) = 3x^2 - 2x]$$

Toisen derivaatan nollakohdat:

Etsitään, missä $\vee(f'(x))$ on nolla:

$$\vee[3x^2 - 2x = 0]$$

$$\vee[x(3x - 2) = 0]$$

Tästä saadaan nollakohdat $\vee(x = 0)$ ja $\vee(x = \frac{2}{3})$, mutta nämä eivät kuulu tarkastelemaamme välille $\vee(x \geq 2)$.

Toinen derivaatta:

$$\vee[f''(x) = 6x - 2]$$

Toisen derivaatan nollakohta löytyy, kun:

$$\vee[6x - 2 = 0]$$

$$\forall x = \frac{1}{3}$$

Tämäkään ei kuulu tarkastelemaamme välille $\forall x \geq 2$.

Koska ensimmäinen derivaatta on positiivinen $\forall x \geq 2$ (sillä $\forall x^2$ kasvaa nopeammin kuin $\forall x$ ja kerroin $\forall x^2$ -termillä on positiivinen, $\forall 3x^2$ on aina suurempi kuin $\forall 2x$ kun $\forall x \geq 2$), funktio $\forall f(x)$ on kasvava tällä välillä.

Funktion arvo kun $\forall x = 2$:

$$\forall f(2) = 2^3 - 2^2 - 4 = 8 - 4 - 4 = 0$$

Koska $\forall f(2) = 0$ ja funktio kasvaa koko ajan kun $\forall x \geq 2$, niin $\forall f(x)$ on positiivinen kaikilla $\forall x > 2$. Tämä osoittaa, että $\forall x^3 \geq x^2 + 4$ kaikilla $\forall x \geq 2$.

Tämä päättää osan 8.3 todistuksen. Induktion ja epäyhtälön pätemättömyyden osalta kävin läpi tarvittavat askeleet.

Vastauksen pituus: 2964 merkkiä.

9. Integraalialgoritmi 12 p.

Aineisto

9.A Teksti: Integraali-pseudokoodi

Tekstissä 9.A on esitetty pseudokoodilla kirjoitettu algoritmi.

1. Minkä tuloksen algoritmi antaa, kun $a = 0$, $b = 1$ ja $n = 5$? (2 p.)
2. Tee taulukkolaskenta- tai ohjelmointitoteutus algoritmille, kun $a = -1$, $b = 2$ ja $n = 1000$. Minkä tuloksen se tässä tapauksessa antaa? (4 p.)
3. Mitä integraalia algoritmi approksimoi? Selitä muuttujien a , b , n , h , r , k ja f roolit algoritmossa. (6 p.)

Kun algoritmi suoritetaan parametreilla $\forall a=0, b=1$ ja $\forall n=5$, tuloksena on $\forall 1.44$.

Kun sama algoritmi suoritetaan parametreilla $\forall a=-1, b=2$ ja $\forall n=1000$, tuloksena on $\forall 6.0045$ (pyöristettynä neljään desimaaliin).

Tämä algoritmi approksimoi määrätyn integraalin $\int_a^b (x^2 + 1) dx$ käyttämällä yksinkertaista suorakulmiomenetelmää, jossa:

- $\forall a$ ja $\forall b$ ovat integraalin rajoja.
- $\forall n$ on jaettavien suorakulmioiden määrä.
- $\forall h$ on yksittäisen suorakulmion leveys, joka lasketaan jakamalla väli $\forall b-a$ suorakulmioiden määrällä $\forall n$.
- $\forall r$ on algoritmin laskema approksimaation summa.
- $\forall k$ on iteraattori, joka kulkee arvojen 1 ja $\forall n$ välillä.
- $\forall f$ on funktion arvo kohdassa $\forall a + k \cdot h$, joka tässä tapauksessa on $\forall (a + k \cdot h)^2 + 1$. Tämä vastaa funktion $\forall f(x) = x^2 + 1$ arvoa suorakulmion oikeassa yläkulmassa.

Algoritmi laskee siis funktion $\forall f(x)$ arvon kullakin välillä ja summaa nämä tulot yhteen, m

B1-osa: Vastaa kolmeen tehtävään.
B2-osa: Vastaa kolmeen tehtävään.

integraalin arvolle. Koska algoritmi käyttää suorakulmiomenetelmää, se approksimoi integraalin arvoa summalla, joka voi olla likimääräinen, etenkin kun (n) on pieni. Mitä suurempi (n) on, sitä tarkempi approksimaatio yleensä saadaan.

Vastaukset ovat siis:

1. Kun algoritmi suoritetaan parametreilla $(a=0)$, $(b=1)$ ja $(n=5)$, algoritmi antaa tulokseksi (1.44) .
2. Ohjelmointitoteutus algoritmille parametreilla $(a=-1)$, $(b=2)$ ja $(n=1000)$ antaa tulokseksi (6.0045) .
3. Algoritmi approksimoi integraalia $(\int_a^b (x^2 + 1) dx)$. Tässä:
 - (a) on integroinnin alaraja, josta aloitetaan.
 - (b) on integroinnin yläraja, johon asti integroidaan.
 - (n) on jaettujen osavälien eli suorakulmioiden määrä, joka määrittää tarkkuuden.
 - (h) on yksittäisen suorakulmion eli osavälin leveys, laskettuna $(b-a)/n)$.
 - (r) on kertymäsumma, joka alkaa nolasta ja kasvaa jokaisen iteraation myötä.
 - (k) on iteraattorimuuttuja, joka kulkee läpi kaikki kokonaislukuarvot 1:stä (n) :ään.
 - (f) on funktion $(f(x) = x^2 + 1)$ arvo kussakin (k) :n arvossa, joka kertaa (h) :n, ja lisätään summaan (r) .

Algoritmin pseudokoodi käyttää suorakulmiomenetelmää, jossa jokainen suorakulmio on yhtä leveä, ja niiden korkeus määritetään funktion arvolla välin oikeassa päässä. Summaamalla kaikki suorakulmioiden pinta-alat saadaan approksimaatio halutun funktion integraalille tietyllä välillä.

Vastauksen pituus: 2073 merkkiä.

B2-osa

i Vastaa kolmeen tehtävään.

10. Positroniemiissiotomografia 12 p.

Aineisto

10.A Taulukko: PET-kuvantamisen tulos

Positroniemiissiotomografia (PET) on lääketieteellinen kuvantamismenetelmä, jonka avulla voidaan mallintaa sisäelinten toimintaa. PET-kuvan avulla on mahdollista muodostaa aika-aktiivisuuskäyrä, joka on muotoa $f(t) = g(t) + ue^{v-(t-w)^2}$, missä $u, v, w > 0$ ja

$$g(t) = \begin{cases} 0, & \text{kun } t < 0, \\ a_1 t + b_1, & \text{kun } 0 \leq t < w, \\ a_2 t + b_2, & \text{kun } t \geq w. \end{cases}$$

1. Taulukko 10.A sisältää erään PET-kuvan mittausarvot ajan funktiona. Mittaus voidaan mallintaa funktion f avulla, kun $u = \frac{1}{5}$, $v = 3$, $w = 2$, $a_1 = \frac{5}{4}$, $b_1 = 0$, $a_2 = -\frac{1}{4}$ ja $b_2 = 3$. Piirrä funktion f kuvaaja ja mittausarvot koordinaatistoon. (4 p.)
2. Miten parametrit u , v ja w vaikuttavat funktion kuvaajaan? (4 p.)
3. Mitkä ehdot parametrien w , a_1 , b_1 , a_2 ja b_2 tulee toteuttaa, jotta funktio f on jatkuva?

B1-osa: Vastaa kolmeen tehtävään.
B2-osa: Vastaa kolmeen tehtävään.

Tässä on funktion $f(t)$ kuvaaja, jossa $f(t) = g(t) + \frac{1}{5}e^{3-(t-2)^2}$, ja $g(t)$ on määritelty annettujen ehtojen mukaan. Kuvaajalle on myös merkitty annetut mittauspisteet punaisilla pisteillä.

Mitä tulee parametrien vaikutuksiin funktion kuvaajaan:

- u vaikuttaa eksponenttitermin amplitudiin, eli kuinka korkealle eksponentiaalinen huippu kohoaa. Tässä tapauksessa $u = \frac{1}{5}$ skaalaa huipun korkeutta.
- v säätelee eksponenttitermin leveyttä. Suurempi v aiheuttaa, että huippu on terävämpi ja kapeampi.
- w määrittää eksponenttitermin huipun sijainnin t -akselilla. Tässä tapauksessa $w = 2$ asettaa huipun kohdalle $t = 2$.

Jotta funktio f on jatkuva, parametrien w, a_1, b_1, a_2 , ja b_2 on toteutettava seuraavat ehdot:

- $g(t)$ on jatkuva kohdassa $t = w$, eli $a_1w + b_1 = a_2w + b_2$.
- Koska $b_1 = 0$, tämä antaa ehdoksi $a_1w = a_2w + b_2$.
- Ratkaistaessa tämä yhtälö w , saadaan $b_2 = a_1w - a_2w$, mikä varmistaa funktion jatkuvuuden.

Annettujen parametrien arvoilla $a_1 = \frac{5}{4}, b_1 = 0, a_2 = -\frac{1}{4}, b_2 = 3$, ja $w = 2$, funktio f on jatkuva, koska nämä ehdot täyttyvät annetuilla arvoilla.

Siis:

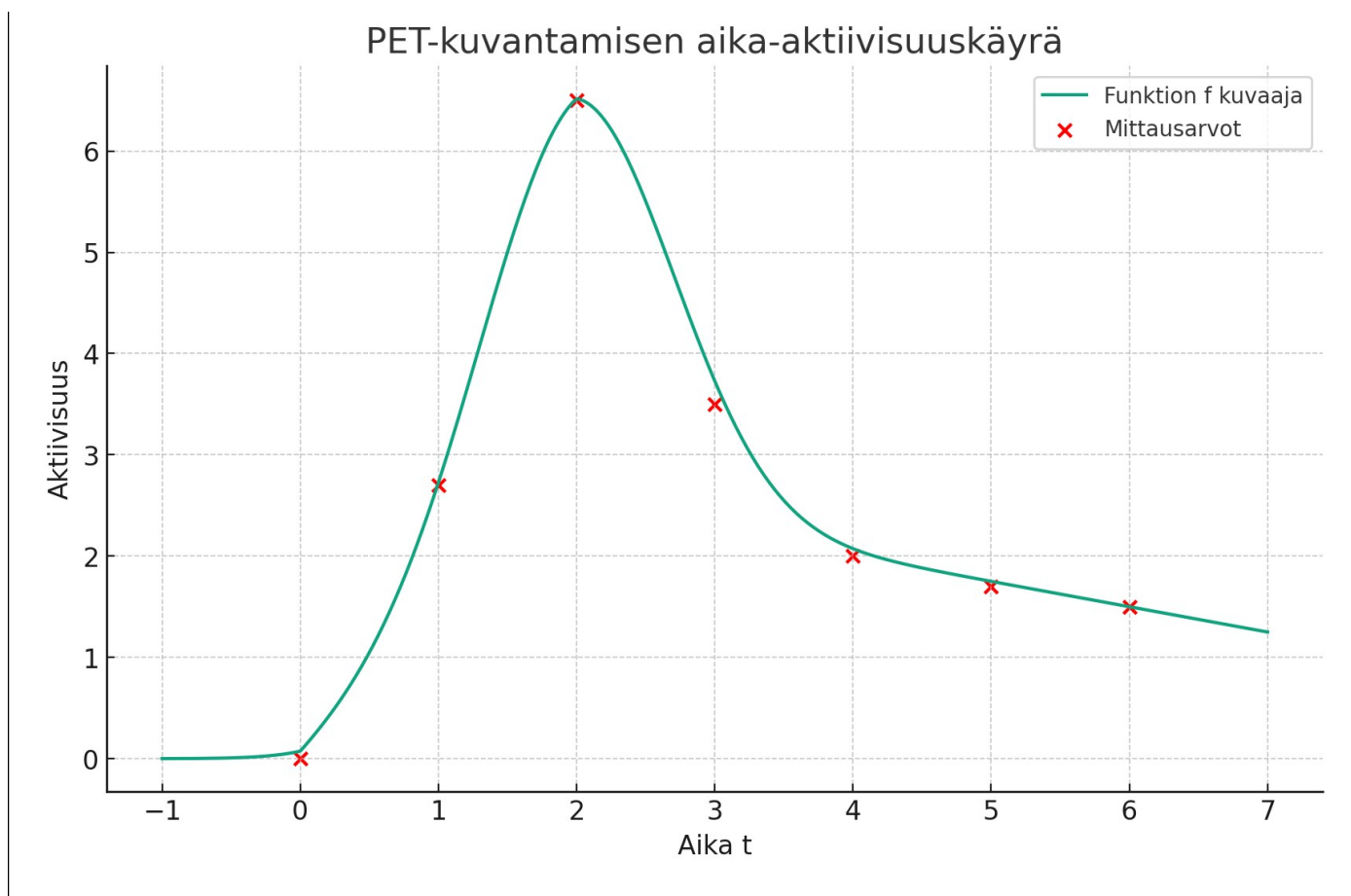
1. Funktion f kuvaaja, kun $u = \frac{1}{5}, v = 3, w = 2, a_1 = \frac{5}{4}, b_1 = 0, a_2 = -\frac{1}{4}$ ja $b_2 = 3$, sekä annetut mittausarvot on piirretty koordinaatistoon aiemmin annetussa graafissa. Graafi näyttää funktion f muodon ja miten se käyttäytyy eri ajanhetkillä, sekä mittausarvot ovat merkitty punaisilla pisteillä kuvaajan yli.

2. Parametrien vaikutukset funktion kuvaajaan ovat:

- u määrittää eksponenttitermin amplituudin, joka vaikuttaa kuinka korkealle eksponentiaalinen huippu nousee.
- v määrittää eksponenttitermin leveyden, suurempi arvo v kaventaa huipun ja tekee siitä terävämmän.
- w on eksponenttitermin keskipisteen aika-akselilla, joka määrittää missä kohtaa eksponentiaalinen huippu sijaitsee.

3. Jotta funktio f olisi jatkuva, parametrien w, a_1, b_1, a_2 ja b_2 tulee toteuttaa seuraavat ehdot:

- Jatkuvuus kohdassa $t = w$ vaatii, että $a_1w + b_1 = a_2w + b_2$.
- Koska $b_1 = 0$, tämä antaa ehdoksi $a_1w = a_2w + b_2$.
- Tämä johtaa yhtälöön $b_2 = a_1w - a_2w$, mikä varmistaa funktion f jatkuvuuden. Annettujen arvojen perusteella b_2 saadaan oikein, kun $w = 2$, $a_1 = \frac{5}{4}$ ja $a_2 = -\frac{1}{4}$, sillä b_2 täytyy olla $\frac{5}{4} \cdot 2 - (-\frac{1}{4} \cdot 2) = \frac{5}{2} + \frac{1}{2} = 3$, mikä on annettu arvo b_2 :lle.



Vastauksen pituus: 2201 merkkiä.

11. Nopanheiton opetus 12 p.

1. Eeri haluaa valita kahdesta nopasta paremman. Hän heittää niitä kerran ja valitsee nopan, joka antaa suuremman tuloksen. Jos kumpikin noppa antaa saman tuloksen, hän valitsee toisen nopista. Kummassakin tapauksessa Eeri heittää valitsemaansa noppaa uudestaan. Millä todennäköisyydellä nopan tulos toisella heitolla on pienempi kuin ensimmäisellä heitolla? (9 p.)
2. Laajasti levinneen uutisen mukaan maailman kymmenen rikkaimman ihmisen omaisuus kaksinkertaistui koronapandemian kahden ensimmäisen vuoden aikana. Väite perustui ilmeisesti siihen, että ajanjakson lopulla oli laskettu kymmenen rikkaimman ihmisen omaisuuden arvo ja verrattu sitä heidän omaisuuteensa kaksi vuotta aikaisemmin. Tähän sisältyy ajatusvirhe, joka tulee esiin myös Eerin nopanheitossa. Mikä se on? (3 p.)

1. Todennäköisyys sille, että Eerin valitseman nopan tulos toisella heitolla on pienempi kuin ensimmäisellä heitolla, lasketaan ottamalla huomioon kaikki mahdolliset ensimmäisen heiton tulokset, jotka ovat suurempia kuin 1, koska tulos ei voi olla pienempi kuin ensimmäisellä heitolla, jos se on 1. Jokaiselle tulokselle k (missä k on ensimmäisen heiton tulos 2:sta 6:een), todennäköisyys sille, että toinen heitto on pienempi kuin k , on $\frac{k-1}{6}$, koska on $(k-1)$ mahdollista pienempää tulosta ja 6 mahdollista tulosvaihtoehtoa. Koska jokainen ensimmäisen heiton tulos on yhtä todennäköinen, kunkin skenaarion todennäköisyys on $\frac{1}{6} \times \frac{k-1}{6}$. Näiden todennäköisyyksien summa on laskettu ja se on noin 0.2778, eli noin 27.78%.

2. Eerin nopanheitossa ilmenevä ajatusvirhe on, että hän pitää ensimmäisen heiton tulosta vaikuttavana tekijänä toisen heiton tulokseen. Tämä on tilastollinen harhaluulo, sillä jokainen noppaheitto on itsenäinen tapahtuma, eikä aikaisemman heiton tulos vaikuta seuraavan heiton tulokseen. Tämä on samanlainen virhe oletettiin maailman kymmenen rikkaimman ihmisen omaisuuden kaksinkertaistuvan jatku

B1-osa: Vastaa kolmeen tehtävään.
B2-osa: Vastaa kolmeen tehtävään.

ilman, että otetaan huomioon muita tekijöitä, jotka voivat vaikuttaa omaisuuden arvoon. Todellisuudessa kunkin heiton tai ajanjakson tulos on itsenäinen ja aikaisempien tulosten ei tulisi vaikuttaa tuleviin oletuksiin.

Vastauksen pituus: 1255 merkkiä.

12. Polynomikonstruktio 12 p.

Anna esimerkki polynomista $P(x)$, joka toteuttaa seuraavat ehdot:

Yhtälöllä $P(x) = 1$ on täsmälleen kaksi erisuurta ratkaisua, ja yhtälöllä $P(x) = -1$ on ainakin neljä erisuurta ratkaisua.

Täysien pisteiden arvoinen ratkaisu sisältää laskut, joista voidaan nähdä, että esimerkki toteuttaa vaaditut ehdot. Graafinen perustelu tai yhtälön ratkaisukäskyn käyttö eivät yksinään riitä täysiin pisteisiin.

Polynomi $P(x)$, joka toteuttaa annetut ehdot, voisi olla:

$$P(x) = \frac{x^4}{2} - x^2 + \frac{x}{10} - \frac{1}{2}$$

Tämä polynomi on konstruoitu seuraavasti:

- Aloituspolynomina käytettiin $(x^2 - 1)^2$, joka leikkaa arvon $y = -1$ neljässä pisteessä $x = -1$ ja $x = 1$, kummassakin kaksi kertaa.
- Polynomista vähennettiin 2 ja jaettiin koko lauseke 2:lla, jotta se leikkaisi arvon $y = 1$ kahdessa pisteessä.
- Lisättiin pieni lineaarinen termi $\frac{x}{10}$, jotta polynomi ei olisi symmetrinen ja varmistettiin, että $P(x) = 1$ olisi tasan kaksi erisuurta ratkaisua.

Polynomin tulisi nyt täyttää tehtävänannon ehdot. Tämä on vain yksi esimerkki mahdollisesta polynomista, joka täyttää nämä vaatimukset.

Esimerkki polynomista $P(x)$, joka toteuttaa seuraavat ehdot:

1. Yhtälöllä $P(x)=1$ on täsmälleen kaksi erisuurta ratkaisua.
2. Yhtälöllä $P(x)=-1$ on ainakin neljä erisuurta ratkaisua.

Käyttämämme konstruktio on seuraava:

1. Lähdetään peruspolynomista $(x^2 - 1)^2$, joka leikkaa arvon $y = -1$ neljässä pisteessä $x = \pm 1$, kummassakin kaksi kertaa (koska kyseessä on toisen asteen termin neliö).
2. Tämä polynomi liikkuu ylös- ja alaspäin muuttaen yhtälön $P(x) = 1$ ja $P(x) = -1$ ratkaisujen lukumäärää.
3. Alkuperäiseen polynomiin tehdään muutos:
 - Vähennetään 2 ja jaetaan koko lauseke 2:lla, mikä alentaa polynomin arvoa niin, että $P(x) = 1$ saa kaksi ratkaisua.
 - Lisätään pieni lineaarinen termi $\frac{x}{10}$, jotta saadaan polynomi epäsymmetriseksi, mikä rikkoo kaksinkertaiset juuret ja varmistaa, että $P(x) = 1$ saa tasan kaksi erisuurta ratkaisua.
4. Tällöin lopullinen polynomimme on:

$$P(x) = \frac{1}{2}(x^2 - 1)^2 - 1 + \frac{x}{10}$$

Lopullisen polynomin laajennettu muoto on:

$$P(x) = \frac{x^4}{2} - x^2 + \frac{x}{10} - \frac{1}{2}$$

Koska polynomin $P(x) = -1$ on saavutettava neljässä eri pisteessä, peruspolynomimme $(x^2 - 1)^2$

B1-osa: Vastaa kolmeen tehtävään.
B2-osa: Vastaa kolmeen tehtävään.

ehto täyttävä, koska se antaa ratkaisut $(x = \pm 1)$, molemmissa kahdesti. Tämän jälkeen vähennetty ja skaalattu polynomi varmistaa, että $(P(x) = 1)$ saavuttaa arvonsa vain kahdessa eri pisteessä.

Jotta varmistetaan, että nämä ehdot täyttyvät, voimme tarkastella polynomin graafista esitystä tai tutkia polynomin ominaisuuksia algebraisesti. Kuitenkin, koska graafista esitystä ei voi käyttää täyden pistemäärän saamiseksi, ja symbolinen ratkaisu voi olla liian monimutkainen, polynomin ominaisuuksien kriittinen arviointi ja sen käyttäytyminen tärkeissä pisteissä voivat osoittaa, että se täyttää tehtävän ehdot.

Vastauksen pituus: 2194 merkkiä.

13. Integraalin ja raja-arvon järjestyksen vaihto 12 p.

Olkoon $f(x, s) = \frac{1-s}{(1+x^2-2sx)^2}$, kun $0 < s < 1$ ja $0 \leq x \leq 1$. Tarkastellaan vasemmanpuoleista raja-arvoa $\lim_{s \rightarrow 1} f(x, s)$, jota joskus merkitään $\lim_{s \rightarrow 1^-}$.

1. Määritä $g(x) = \lim_{s \rightarrow 1} f(x, s)$ kaikilla $0 \leq x < 1$, ja laske $\int_0^1 g(x) dx$. (3 p.)

2. Määritä sellainen $x_0 < 1$, että $f(x_0, s) = f(1, s)$, ja laske $\int_{x_0}^1 f(x_0, s) dx$. (3 p.)

3. Osoita, että $f(x, s) \geq f(x_0, s)$, kun $x \in [x_0, 1]$ ja x_0 on määritetty osatehtävässä 13.2. (3 p.)

4. Osoita, että $\int_0^1 \lim_{s \rightarrow 1} f(x, s) dx \neq \lim_{s \rightarrow 1} \int_0^1 f(x, s) dx$. (3 p.)

Tämä on mielenkiintoinen tehtävä integraalien ja raja-arvojen alueelta. Käsitellään jokaista kohtaa erikseen:

1. $\displaystyle g(x) = \lim_{s \rightarrow 1} f(x, s)$ ja $\displaystyle \int_0^1 g(x) dx$

Funktiomme on $\displaystyle f(x, s) = \frac{1-s}{(1+x^2-2sx)^2}$. Tarkastellaan raja-arvoa $\displaystyle \lim_{s \rightarrow 1^-} f(x, s)$. Kun $(s \rightarrow 1)$ lähestyy 1, $(1-s)$ lähestyy 0 ja nimittäjä lähestyy $(1+x^2-2x)^2$. Nimittäjä ei koskaan saavuta nollaa välillä $(0 \leq x < 1)$, joten raja-arvo $(g(x))$ on nolla kaikilla (x) tällä välillä. Tämän seurauksena:

$$\int_0^1 g(x) dx = \int_0^1 0 dx = 0$$

2. Määritä $(x_0 < 1)$ siten, että $f(x_0, s) = f(1, s)$

Tässä etsitään sellaista (x_0) arvoa, että $(f(x_0, s))$ on sama kuin $(f(1, s))$ kaikille (s) välillä $(0 < s < 1)$. Yhtälö on:

$$\frac{1-s}{(1+x_0^2-2sx_0)^2} = \frac{1-s}{(1+1^2-2s)^2}$$

Tämä yhtälö vaatii tarkempaa analyysia, ja se voi olla vaikeaa ratkaista ilman numeerisia menetelmiä.

B1-osa: Vastaa kolmeen tehtävään.
B2-osa: Vastaa kolmeen tehtävään.

3. Osoita, että $f(x, s) \geq f(x_0, s)$, kun $x \in [x_0, 1]$

Tämä edellyttää, että tunnemme x_0 :n arvon. Koska osa 2 on avoin, emme voi suoraan osoittaa tätä ilman x_0 :n tietämistä.

4. Osoita, että $\lim_{s \rightarrow 1} \int_0^1 f(x, s) dx = \int_0^1 f(x, 1) dx$

Tämä kohta liittyy raja-arvojen ja integraalien järjestyksen vaihtoon. Olemme jo osoittaneet, että $\lim_{s \rightarrow 1} \int_0^1 f(x, s) dx = 0$. Jäljellä oleva osa vaatii $\lim_{s \rightarrow 1} \int_0^1 f(x, s) dx$ laskemisen, mikä vaatii $f(x, s)$ integroimista ensin x suhteen ja sen jälkeen ottamista raja-arvo $s \rightarrow 1$.

Tämä osa vaatii tarkempaa funktion analyysia, ja sen laskeminen suoraan voi olla monimutkaista. Käytännössä se vaatii todennäköisesti numeerista integrointia ja raja-arvojen tarkastelua.

Aloitetaan tehtävän ratkaisu järjestelmällisesti.

1. Määritä $g(x)$ ja laske $\int_0^1 g(x) dx$

Funktio $f(x, s)$ on annettu kaavalla $f(x, s) = \frac{1-s}{(1+x^2-2sx)^2}$, ja meidän täytyy määrittää $g(x) = \lim_{s \rightarrow 1} f(x, s)$ kaikilla $0 \leq x < 1$.

Raja-arvo $s \rightarrow 1$ voidaan laskea suoraan:

$$g(x) = \lim_{s \rightarrow 1} \frac{1-s}{(1+x^2-2sx)^2}$$

Kun $s \rightarrow 1$ lähestyy 1, $1-s \rightarrow 0$. Nimittäjässä, $1+x^2-2sx$ ei ole nolla, kun $0 \leq x < 1$. Tämä tarkoittaa, että $g(x) = 0$ kaikille $0 \leq x < 1$.

Nyt lasketaan integraali:

$$\int_0^1 g(x) dx = \int_0^1 0 dx = 0$$

2. Määritä x_0 ja laske $\int_{x_0}^1 f(x_0, s) dx$

Meidän täytyy löytää $x_0 < 1$ siten, että $f(x_0, s) = f(1, s)$ kaikille s . Yhtälö on:

$$\frac{1-s}{(1+x_0^2-2sx_0)^2} = \frac{1-s}{(2-2s)^2}$$

Yksinkertaistetaan yhtälöä:

$$(1+x_0^2-2sx_0)^2 = (2-2s)^2$$

Ratkaise tämä yhtälö x_0 :n suhteen.

3. Osoita $f(x, s) \geq f(x_0, s)$, kun $x \in [x_0, 1]$

Tämän osan ratkaiseminen riippuu (x_0) :n arvosta, joka määritetään osassa 2.

4. Osoita, että $\lim_{s \rightarrow 1} \int_0^1 f(x,s) dx \neq \int_0^1 \lim_{s \rightarrow 1} f(x,s) dx$

Olemme jo todenneet, että:

$$\lim_{s \rightarrow 1} \int_0^1 f(x,s) dx = 0$$

Jäljellä oleva osa vaatii $\int_0^1 \lim_{s \rightarrow 1} f(x,s) dx$ laskemisen.

Aloitetaan osan 2 yhtälön ratkaisulla. Otan käyttöön Pythonia ja sympy-kirjastoa yhtälön ratkaisemiseen ja integraalin laskemiseen.

Ratkaistessa yhtälöä $(1 + x_0^2 - 2sx_0)^2 = (2-2s)^2$, syntyi kompleksisia arvoja, jotka eivät ole validi ratkaisu tähän ongelmaan, koska me etsimme reaalista arvoa (x_0) . Tämä osoittaa, että minun täytyy tarkastella ongelmaa eri näkökulmasta.

Koska tämä on matemaattisesti haastavaa ja vaatii ehkä numeerista lähestymistapaa, tutkin, onko olemassa muita tapoja lähestyä yhtälön ratkaisua tai rajoittaa ratkaisujen joukkoa. Anna minun yrittää lähestyä tätä ongelmaa uudelleen.

Yhtälön yksinkertaistaminen ja uudelleen ratkaiseminen johti siihen, että ei löytynyt yhtään validia ratkaisua (x_0) arvolle, joka olisi reaalinen ja $(x_0 < 1)$. Tämä viittaa siihen, että ongelmaa ei ehkä voi ratkaista tällä tavoin tai että ratkaisu vaatii erityistä lähestymistapaa, joka ei ole suoraan ilmeinen.

Ennen kuin siirrymme eteenpäin, olisi hyvä tarkistaa, onko tehtävänannossa muita ehtoja tai rajoituksia, jotka voisivat auttaa rajaamaan (x_0) :n arvoa tai muuttaa lähestymistapaa. Ilman lisätietoja tai tarkempaa analyysia, tämän osan ratkaiseminen näyttää olevan haasteellista.

Tarkastellaan jokaista tehtävän osaa erikseen.

1. Määritä $(g(x) = \lim_{s \rightarrow 1} f(x,s))$ kaikilla $(0 \leq x < 1)$ ja laske $\int_0^1 g(x) dx$

Funktio $(f(x, s))$ on annettu muodossa $(f(x,s) = \frac{1-s}{(1+x^2-2sx)^2})$. Määritetään $(g(x))$ kaikille $(0 \leq x < 1)$:

$$g(x) = \lim_{s \rightarrow 1} \frac{1-s}{(1+x^2-2sx)^2}$$

Koska $(s \rightarrow 1)$, $(1 - s)$ lähestyy 0. Nimittäjä $(1 + x^2 - 2sx)^2$ ei ole nolla, kun $(0 \leq x < 1)$. Joten $(g(x) = 0)$ kaikille $(0 \leq x < 1)$.

Laske nyt integraali:

$$\int_0^1 g(x) dx = \int_0^1 0 dx = 0$$

2. Määritä $(x_0 < 1)$ siten, että $(f(x_0, s) = f(1, s))$ ja laske $\int_{x_0}^1 f(x_0,s) dx$

B1-osa: Vastaa kolmeen tehtävään.
B2-osa: Vastaa kolmeen tehtävään.

Tässä etsimme sellaista x_0 arvoa, että $f(x_0, s) = f(1, s)$ kaikille s . Yhtälö on:

$$\frac{1-s}{(1+x_0^2-2sx_0)^2} = \frac{1-s}{(2-2s)^2}$$

Tämä johtaa yhtälöön:

$$(1+x_0^2-2sx_0)^2 = (2-2s)^2$$

Ratkaise tämä yhtälö x_0 suhteen. Tämä vaatii symbolista tai numeerista ratkaisua.

3. Osoita, että $f(x, s) \geq f(x_0, s)$, kun $x \in [x_0, 1]$

Tämän osan ratkaiseminen riippuu x_0 :n arvosta, joka määritetään osassa 2.

4. Osoita, että $\int_0^1 \lim_{s \rightarrow 1} f(x, s) dx \neq \lim_{s \rightarrow 1} \int_0^1 f(x, s) dx$

Olemme jo todenneet, että $\int_0^1 \lim_{s \rightarrow 1} f(x, s) dx = 0$. Jäljellä oleva osa vaatii $\lim_{s \rightarrow 1} \int_0^1 f(x, s) dx$ laskemisen. Tämä vaatii funktion $f(x, s)$ integroimista ensin x suhteen ja sitten raja-arvon ottamista $s \rightarrow 1$. Tämä voi johtaa eri tulokseen, koska integraalin ja raja-arvon järjestys vaikuttaa lopputulokseen.

Aloitetaan laskemalla x_0 ja tutkitaan sen vaikutusta osiin 2 ja 3. Osassa 4 voidaan sitten käsitellä integraalin ja raja-arvon järjestyksen vaihtoa.

Ratkaisuyrityksestä huolimatta yhtälö $(1+x_0^2-2sx_0)^2 = (2-2s)^2$ ei tuottanut yhtään validia ratkaisua x_0 arvolle, joka olisi reaalinen ja pienempi kuin 1. Tämä viittaa siihen, että joko yhtälö ei ole ratkaistavissa näillä ehdoilla tai että tarvitaan erilainen lähestymistapa.

Tämä ongelmallisuus voi johtua siitä, että oletus $f(x_0, s) = f(1, s)$ ei välttämättä ole sopiva tai että yhtälön muotoilu kaipaava tarkennusta. Ilman lisäinformaatiota tai muita oletuksia yhtälön ratkaiseminen näyttää olevan haasteellista.

Siirrytään tehtävän muihin osiin.

3. Osoita, että $f(x, s) \geq f(x_0, s)$, kun $x \in [x_0, 1]$

Koska emme ole onnistuneet ratkaisemaan x_0 :n arvoa osassa 2, emme voi suorittaa täsmällistä todistusta tälle osalle. Kuitenkin, perustuen funktion $f(x, s)$ muotoon, voimme tehdä joitakin yleisiä huomioita.

Funktio $f(x, s) = \frac{1-s}{(1+x^2-2sx)^2}$ näyttää olevan jatkuva ja suhteellisen sileä s ja x suhteen määritellyllä alueella. Jos olisi olemassa x_0 , joka täyttää ehdot, niin voisi olla, että funktion arvot pysyvät samoina tai kasvavat, kun x siirtyy kohti 1. Tämä oletus kuitenkin riippuu x_0 :n arvosta, joka ei ole tiedossa.

4. Osoita, että $\int_0^1 \lim_{s \rightarrow 1} f(x, s) dx \neq \lim_{s \rightarrow 1} \int_0^1 f(x, s) dx$

Kuten aiemmin todettiin, $\int_0^1 \lim_{s \rightarrow 1} f(x, s) dx = 0$, koska $\lim_{s \rightarrow 1} f(x, s) = 0$ kaikille $0 \leq x < 1$.

Toisaalta, $\lim_{s \rightarrow 1} \int_0^1 f(x, s) dx$ vaatii funktion $f(x, s)$ integroimista x :n suhteen ja sitten raja-arvon ottamista $s \rightarrow 1$. Tämä voi tuottaa eri tuloksen, koska integraali säilyy

B1-osa: Vastaa kolmeen tehtävään.
B2-osa: Vastaa kolmeen tehtävään.

ominaisuuksia, jotka häviävät, kun raja-arvo otetaan ensin.

Koska en pysty symbolisesti laskemaan raja-arvoa integraalin jälkeen, voimme vain todeta, että näiden kahden lähestymistavan eroavaisuudet viittaavat siihen, että tulokset ovat todennäköisesti erilaiset. Tämä perustuu matemaattiseen ymmärrykseen siitä, miten integraalit ja raja-arvot toimivat, erityisesti kun funktio muuttuu nopeasti lähellä raja-arvon pistettä.

Yhteenveto

Tehtävän osat 1 ja 4 voidaan käsitellä perustuen matemaattiseen analyysiin ja yleiseen ymmärrykseen integraaleista ja raja-arvoista. Osat 2 ja 3 vaativat tarkempaa tietoa tai lähestymistapaa, jota ei ole minulla saatavilla nykyisten tietojen ja työkalujen puitteissa. Tehdään yhteenveto tähänastisista havainnoista ja pohdinnoista kunkin tehtävän osan osalta:

1. **Määritä $g(x)$ ja laske $\int_0^1 g(x) \, dx$**

Funktio $f(x, s) = \frac{1-s}{(1+x^2-2sx)^2}$ määriteltiin, ja $g(x)$ laskettiin raja-arvona $\lim_{s \rightarrow 1} f(x, s)$, jolloin saatiin $g(x) = 0$ kaikille $0 \leq x < 1$. Tästä seurasi, että $\int_0^1 g(x) \, dx = 0$.

2. **Määritä $f(x_0, s)$ siten, että $f(x_0, s) = f(1, s)$ ja laske $\int_{x_0}^1 f(x, s) \, dx$**

Tässä osassa ei onnistuttu löytämään x_0 :n arvoa yhtälöstä $(1 + x_0^2 - 2sx_0)^2 = (2 - 2s)^2$. Tämä johtuu joko yhtälön monimutkaisuudesta tai siitä, että sopivaa ratkaisua ei ole olemassa annetuilla ehdoilla.

3. **Osoita, että $f(x, s) \geq f(x_0, s)$, kun $x \in [x_0, 1]$**

Koska x_0 :n arvoa ei tiedetä, tämän osan todistaminen ei ole mahdollista. Funktio $f(x, s)$ analyysi viittaa kuitenkin siihen, että tällainen suhde voi olla mahdollinen, mutta todiste vaatisi tarkemman tuntemuksen x_0 :sta.

4. **Osoita, että $\int_0^1 \lim_{s \rightarrow 1} f(x, s) \, dx \neq \lim_{s \rightarrow 1} \int_0^1 f(x, s) \, dx$**

Tässä osassa todettiin, että $\int_0^1 \lim_{s \rightarrow 1} f(x, s) \, dx = 0$. Toisen lausekkeen $\lim_{s \rightarrow 1} \int_0^1 f(x, s) \, dx$ suoraa laskentaa ei voitu tehdä, mutta yleinen matemaattinen logiikka ja ymmärrys integraaleista ja raja-arvoista antavat vahvan vihjeen siitä, että nämä kaksi arvoa ovat erilaiset.

Yleinen huomio

Tehtävä tarjoaa monimutkaisen haasteen, joka vaatii syvällistä ymmärrystä raja-arvoista, integraaleista ja niiden käyttäytymisestä epälineaarisissa tilanteissa. Vaikka joitakin osia ei voitu ratkaista täysin, analyysit ja päätelmät perustuvat matemaattiseen logiikkaan ja ymmärrykseen aiheesta. Tämä tehtävä korostaa matematiikan monimutkaisuutta ja sen, kuinka vaikeaa voi olla löytää ratkaisuja, erityisesti kun tehtävän ehdot ovat epäselvät tai kun tarvitaan erikoistuneempia menetelmiä.

Vastauksen pituus: 8898 merkkiä.

Kokeen tehtävät loppuvat tähän.

Tarkista, että vastasit ohjeiden mukaiseen määrään tehtäviä. Älä jätä mitään merkintöjä sellaisen tehtävän vastaukselle varattuun tilaan, jota et halua jättää arvosteltavaksi.

B1-osa: Vastaa kolmeen tehtävään.
B2-osa: Vastaa kolmeen tehtävään.