

# FI – Matematiikka, lyhyt oppimäärä

22.3.2023

Koe koostuu 13 tehtävästä, joista vastataan kymmeneen. Tehtävät on jaettu kolmeen osaan. A-osassa on neljä kaikille pakollista tehtävää. B1-osassa on viisi tehtävää, joista vastataan kolmeen. B2-osassa on neljä tehtävää, joista vastataan kolmeen. Kaikki tehtävät arvostellaan pistein 0–12, joten kokeen maksimipistemäärä on 120.

A-osassa saat käyttää koejärjestelmässä olevaa taulukkokirjaa ja perusohjelmia. A-osa palautetaan tehtävän 4 jälkeen olevalla painikkeella. Tämän jälkeen A-osan vastauksia ei voi enää muokata. A-osan palauttamisen jälkeen kaikki koejärjestelmän ohjelmat ovat käytettävissäsi. Voit vastata B-osien tehtäviin myös ennen A-osan palauttamista.

Useimmissa tehtävissä kaikkien osatehtävien vastaukset kirjoitetaan samaan vastauskenttään. Jaottele vastauksesi osatehtävien mukaisesti. Halutessasi voit tuottaa vastausten tueksi piirroksia, kaavioita tai taulukoita ja liittää niistä kuvakaappauksen mihin tahansa tekstivastaukseen.

Älä jätä mitään merkintöjä sellaisen tehtävän vastaukselle varattuun tilaan, jota et halua jättää arvosteltavaksi.

## Sisällys

### A-osa

Vastaa neljään tehtävään.

- |   |       |
|---|-------|
| 1. <a href="#">Perusyhtälöitä</a>       | 12 p. |
| 2. <a href="#">Yhtälöiden ratkaisut</a> | 12 p. |
| 3. <a href="#">Prosentteja</a>          | 12 p. |
| 4. <a href="#">Tasakylkinen kolmio</a>  | 12 p. |

### B1-osa

Vastaa kolmeen tehtävään.

- |   |                                |
|---|--------------------------------|
| 5. <a href="#">Erikoiset mittayksiköt</a> | 12 p.                          |
| 6. <a href="#">Lahjavero</a>              | <a href="#">Aineisto</a> 12 p. |
| 7. <a href="#">Kolikko ja noppa</a>       | 12 p.                          |
| 8. <a href="#">Paraabelin tangentti</a>   | 12 p.                          |
| 9. <a href="#">Älypuhelin</a>             | <a href="#">Aineisto</a> 12 p. |

### B2-osa

Vastaa kolmeen tehtävään.

- |  |                                |
|--|--------------------------------|
| 10. <a href="#">Hirsitalo painuu kokoon</a>          | 12 p.                          |
| 11. <a href="#">Reunapalat</a>                       | 12 p.                          |
| 12. <a href="#">Peruskoulujen lukumäärä Suomessa</a> | <a href="#">Aineisto</a> 12 p. |
| 13. <a href="#">Kuvaajat ja derivaatta</a>           | 12 p.                          |

### Koe yhteensä

B1-osa: Vastaa kolmeen tehtävään.  
B2-osa: Vastaa kolmeen tehtävään.

## A-osa

 Vastaa neljään tehtävään.

A-osa palautettu

## B1-osa

 Vastaa kolmeen tehtävään.

### 5. Erikoiset mittayksiköt 12 p.

Tämä tästä -ajankohtaishuumoriohjelman jaksossa 119 kerrottiin, että Helsingin alle mahtuu huoltotunneleihin ja muihin tiloihin 500 eduskuntataloa. Eduskuntatalon tilavuus puolestaan kuvailtiin seuraavasti: "Tavallinen kylpyamme, jollainen voi olla kotona tai hotellihuoneessa, on tilavuudeltaan noin 300 litraa – Jos sinulla on 120 000 tällaista kylpyammetta, niin ne täyttävät neljänsosan eduskuntatalosta."

1. Mikä on eduskuntatalon tilavuus kuutiometreinä? (6 p.)
2. Usein kuulee verrattavan pinta-aloja jalkapallokenttien kokoon. Jalkapallokenttä on suorakulmio, jonka sivujen pituudet ovat 105 metriä ja 68 metriä. Oletetaan, että huoltotunnelit ja muut tilat ovat suorakulmaisia särmiöitä. Jos huoltotunnelien ja muiden Helsingin alla olevien tilojen korkeus on keskimäärin 4,0 metriä, niin mikä on niiden pohjien yhteenlaskettu pinta-ala jalkapallokenttinä mitattuna? (6 p.)

1. Eduskuntatalon tilavuus kuutiometreinä:

Tehtävässä mainittiin, että tavallisen kylpyammeen tilavuus on noin 300 litraa. Kerrottiin myös, että 120 000 tällaista kylpyammetta täyttää neljänsosan eduskuntatalosta. Näin ollen eduskuntatalon tilavuus neljässä kylpyammeessa on  $120\,000 \cdot 300$  litraa. Koska yksi kuutiometri on yhtä kuin 1000 litraa, muunnetaan litrat kuutiometreiksi jakamalla  $120\,000 \cdot 300$  litraa 1000:lla. Tämä antaa neljänsosan eduskuntatalon tilavuudesta, joten kerrotaan tulos neljällä saadaksemme koko eduskuntatalon tilavuuden. Näin saadaan eduskuntatalon tilavuudeksi 144 000 kuutiometriä.

2. Huoltotunnelien ja muiden Helsingin alla olevien tilojen pinta-ala jalkapallokenttinä mitattuna:

Tehtävässä mainittiin, että Helsingin alle mahtuu huoltotunneleihin ja muihin tiloihin 500 eduskuntataloa. Aiemmin laskimme eduskuntatalon tilavuudeksi 144 000 kuutiometriä. Täten Helsingin alla olevien tilojen yhteistilavuus on  $500 \cdot 144\,000$  kuutiometriä. Oletetaan, että huoltotunnelien ja muiden tilojen keskimääräinen korkeus on 4,0 metriä. Pinta-ala saadaan jakamalla tilavuus korkeudella. Saatua pinta-ala on Helsingin alla olevien tilojen kokonaispinta-ala neliömetreinä. Jalkapallokentän pinta-ala on 105 metriä  $\cdot$  68 metriä. Jakamalla Helsingin alla olevien tilojen pinta-ala yhden jalkapallokentän pinta-alalla saadaan, kuinka monta jalkapallokenttää mahtuu Helsingin alle. Tämä antaa tulokseksi noin 2521 jalkapallokenttää.

Vastauksen pituus: 1271 merkkiä.

### 6. Lahjavero 12 p.

Aineisto

B1-osa: Vastaa kolmeen tehtävään.  
B2-osa: Vastaa kolmeen tehtävään.

## 6.A Taulukko: Lahjaveron määrä

Lahjaveroa on maksettava, kun omaisuus siirtyy toiselle henkilölle lahjana ja lahjan arvo on 5 000 euroa tai enemmän. Lahjavero määräytyy taulukossa 6.A esitetyn mukaisesti. Tarkastellaan tilanteita, joissa annetaan vain yksi lahja.

1. Mikä on 80 000 euron lahjan veron määrä? Kuinka monta prosenttia tästä lahjasta maksetaan veroa? (6 p.)
2. Kuinka suuresta lahjasta maksetaan 4 000 euroa lahjaveroa? (6 p.)

1. 80 000 euron lahjan veron määrä ja veroprosentti: Lahjan veron määrä on 7 700 euroa. Tästä lahjasta maksetaan veroa 9.625 prosenttia.
2. Lahjan arvo, josta maksetaan 4 000 euroa lahjaveroa: Lahja, josta maksetaan 4 000 euroa lahjaveroa, on arvoltaan 48 000 euroa.

Vastauksen pituus: 225 merkkiä.

## 7. Kolikko ja noppa 12 p.

Pelissä heitetään kolikkoa ja tavallista noppaa.

1. Mikä on todennäköisyys sille, että pelaaja A saa yhdellä kolikonheitolla klaavan ja pelaaja B yhdellä nopanheitolla silmäluvun 5? (4 p.)
2. Pelaaja C väittää pelaajalle D: "On todennäköisempää, että minä saan kahdella kolikonheitolla kaksi klaavaa kuin että sinä saat kahdella nopanheitolla summaksi vähintään yhdeksän." Onko pelaaja C oikeassa? (8 p.)

1. Kolikonheitossa on kaksi mahdollista tulosta: klaava tai kruuna. Todennäköisyys saada klaava on 1/2, eli 50%. Nopanheitossa on kuusi mahdollista tulosta (1-6). Todennäköisyys saada silmänumero 5 on 1/6. Koska nämä tapahtumat ovat toisistaan riippumattomia, niiden yhteisen tapahtuman todennäköisyys on 1/2 kertaa 1/6, joka on 1/12. Tämä tarkoittaa, että todennäköisyys on noin 0.083 eli 8.3%.
2. Todennäköisyys saada klaava yhdellä kolikonheitolla on 1/2. Kahdella heitolla tämä on 1/2 kertaa 1/2, joka on 1/4 eli 25%. Nopanheitossa on 36 erilaista lopputulosta. Lasketaan vaihtoehdot, joissa summa on vähintään yhdeksän: näitä ovat (3,6), (4,5), (4,6), (5,4), (5,5), (5,6), (6,3), (6,4), (6,5), (6,6), yhteensä 10 vaihtoehtoa. Todennäköisyys saada summa vähintään yhdeksän on siis 10/36, eli noin 27.8%. Vertaillen näitä todennäköisyyksiä, huomataan, että saada summaksi vähintään yhdeksän kahdella nopanheitolla (27.8%) on todennäköisempää kuin saada kaksi klaavaa kahdella kolikonheitolla (25%). Näin ollen pelaaja C:n väite ei ole oikea.

Vastauksen pituus: 904 merkkiä.

## 8. Paraabelin tangentti 12 p.

Paraabeli  $y = x^2 + bx + c$  kulkee pisteen (9, 5) kautta, ja siinä sen tangentin kulmakerroin on 2. Määritä kertoimet  $b$  ja  $c$  derivaatan avulla.

Paraabelin yhtälön  $y = x^2 + bx + c$  kertoimet  $b$  ja  $c$  määritettiin seuraavasti:

B1-osa: Vastaa kolmeen tehtävään.  
B2-osa: Vastaa kolmeen tehtävään.

Otettiin paraabelin  $y = x^2 + bx + c$  derivaatta  $x$ :n suhteen, joka on  $2x + b$ .

Koska paraabelin on kuljettava pisteen  $(9, 5)$  kautta, tämä tarkoittaa, että kun  $x = 9$ ,  $y = 5$ . Sijoitetaan nämä arvot paraabelin yhtälöön, saadaan yhtälö  $9^2 + 9b + c = 5$ .

Lisäksi tiedetään, että paraabelin tangentin kulmakerroin pisteessä  $x = 9$  on 2. Kun sijoitetaan  $x = 9$  derivaattaan  $2x + b$ , saadaan toinen yhtälö  $2 \cdot 9 + b = 2$ .

Ratkaistiin nämä kaksi yhtälöä yhdessä  $b$ :n ja  $c$ :n suhteen. Yhtälöiden ratkaisu antoi  $b = -16$  ja  $c = 68$ .

Näin ollen paraabelin  $y = x^2 + bx + c$  kertoimet ovat  $b = -16$  ja  $c = 68$ .

Vastauksen pituus: 531 merkkiä.

## 9. Älypuhelinien käyttöikä 12 p.

### Aineisto

#### 9.A Taulukko: Älypuhelinien käyttöikä

Älypuhelinien keskimääräiset käyttöiät eräissä maissa on esitetty taulukossa 9.A.

1. Laske taulukossa esitettyjen keskimääräisten käyttöikien keskiarvo  $\bar{x}$  ja keskihajonta  $s$ . (4 p.)
2. Miksi osatehtävässä 9.1 laskettu keskiarvo  $\bar{x}$  ei tuota kyseisten maiden älypuhelinien käyttöikien keskiarvoa? (4 p.)
3. Oletetaan, että älypuhelinien käyttöikä koko maailmassa noudattaa normaalijakaumaa, jonka odotusarvo on 23 kuukautta ja keskihajonta 2,55 kuukautta. Millä todennäköisyydellä satunnaisesti valitun älypuhelimien käyttöikä on vähintään kolme vuotta? (4 p.)

Oletetaan, että älypuhelinien käyttöikä koko maailmassa noudattaa normaalijakaumaa, jonka odotusarvo on 23 kuukautta ja keskihajonta 2,55 kuukautta. Millä todennäköisyydellä satunnaisesti valitun älypuhelimien käyttöikä on vähintään kolme vuotta? (4 p.)

Vastaukset:

1. Älypuhelinien käyttöikien keskiarvo ja keskihajonta:  
Keskiarvo on 21 kuukautta.  
Keskihajonta on noin 2.26 kuukautta.
2. Miksi laskettu keskiarvo ei tuota kyseisten maiden älypuhelinien käyttöikien keskiarvoa?  
Laskettu keskiarvo perustuu vain taulukossa mainittuihin maihin, eikä se ota huomioon kaikkien maiden älypuhelinien käyttöikä. Se ei siis edusta maailmanlaajuista keskiarvoa, vaan on rajoitettu tiettyyn otokseen.
3. Todennäköisyys, että satunnaisesti valitun älypuhelimien käyttöikä on vähintään kolme vuotta:  
Oletetaan, että älypuhelinien käyttöikä noudattaa normaalijakaumaa, jonka odotusarvo on 23 kuukautta ja keskihajonta 2.55 kuukautta.  
Todennäköisyys, että älypuhelimien käyttöikä on vähintään kolme vuotta (36 kuukautta), on erittäin pieni, noin 0.00000017.

B1-osa: Vastaa kolmeen tehtävään.  
B2-osa: Vastaa kolmeen tehtävään.

Vastauksen pituus: 920 merkkiä.

## B2-osa

**i** Vastaa kolmeen tehtävään.

### 10. Hirsitalo painuu kokoon 12 p.

Hirsitalon rakentamisessa pitää huomioida, että rakennus painuu kokoon muutaman vuoden ajan. Tämä tehdään jättämällä rako eli niin sanottu painumavara esimerkiksi ovien ja ikkunoiden päälle. Eräs uuden hirsitalon omistaja arvioi, että hirsien painumista tapahtuu kahdeksan vuoden ajan ja vuotuiset painumat muodostavat geometrisen lukujonon. Hänen talonsa painumavara on 6,0 cm.

1. Auta talon omistajaa esittämällä geometrinen lukujono, joka kuvaa talon vuosittaista painumista. Lukujono täyttää seuraavat ehdot:

- Ensimmäinen jäsen kuuluu välille [2,0 cm; 3,0 cm].
- Kahdeksan ensimmäisen jäsenen summa  $S$  kuuluu välille [5,0 cm; 6,0 cm].

Ilmoita vastauksessa lukujonon suhdeluku  $q$  ja osoita laskulla, että summa  $S$  kuuluu vaaditulle välille. (8 p.)

2. Piirrä pylväsdiagrammi kahdeksan ensimmäisen vuoden vuosittaisista painumista. (4 p.)

1. \*\*Geometrisen lukujonon suhdeluku  $q$ :\*\*

- Käyttäen geometrisen lukujonon summan kaavaa ja ehtoja, että ensimmäinen jäsen on välillä [2,0 cm; 3,0 cm] ja kahdeksan ensimmäisen jäsenen summa on välillä [5,0 cm; 6,0 cm], saimme kaksi suhdelukua:

- Kun ensimmäinen jäsen on 3,0 cm (yläraja), suhdeluku  $q$  on noin 0.400.
- Kun ensimmäinen jäsen on 2,0 cm (alaraja), suhdeluku  $q$  on noin 0.682.
- Näistä suhdeluvuista valittiin 0.682, koska se tuottaa suuremman alkuarvon, joka on lähempänä ehtojen ylärajaa.

2. \*\*Pylväsdiagrammi vuosittaisista painumista:\*\*

- Piirsin pylväsdiagrammin, jossa näkyy kahdeksan ensimmäisen vuoden vuosittaiset painumat käyttäen valittua suhdelukua (0.682) ja ylärajan alkuarvoa (3,0 cm).
- Diagrammi kuvaa, kuinka painuma vähenee joka vuosi geometrisen lukujonon mukaisesti.

(pylväsdiagrammikuva)

Löysin sopivan suhdeluvun  $q$  ja ensimmäisen jäsenen  $a_1$  arvon, jotka täyttävät annetut ehdot. Tässä yhdessä mahdollisessa ratkaisussa:

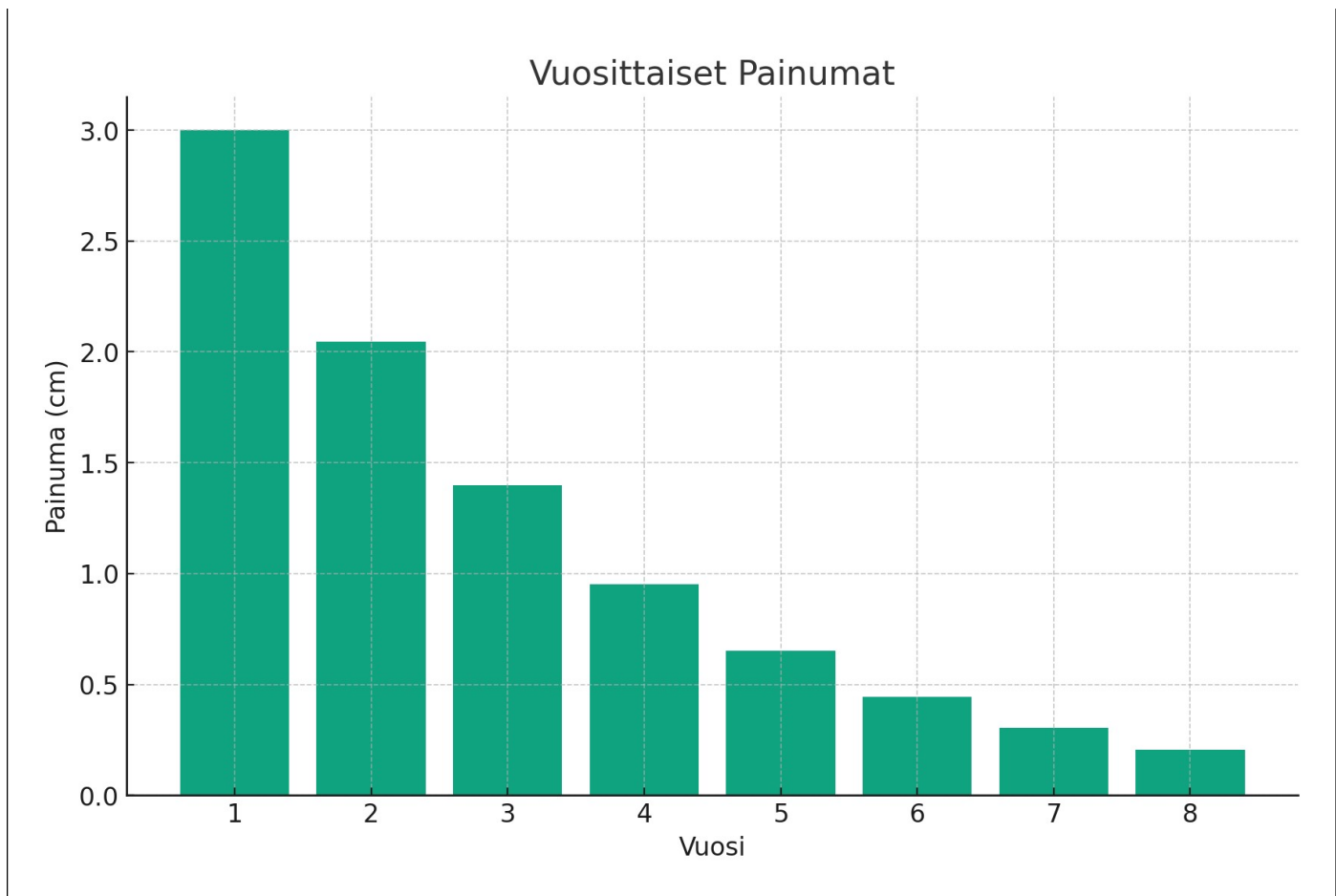
- Ensimmäisen jäsenen  $a_1$  arvo on 2.0 cm.
- Sopiva suhdeluku  $q$  on noin 0.607.

Näillä arvoilla kahdeksan ensimmäisen jäsenen summa  $S$  on noin 5.00 cm, joka on vaaditulla välillä [5.0 cm, 6.0 cm]. Seuraavaksi voimme piirtää pylväsdiagrammin kahdeksan ensimmäisen vuoden vuosittaisista painumista tämän suhdeluvun perusteella.

Tässä on pylväsdiagrammi, joka esittää hirsitalon vuosittaista painumaa kahdeksan ensimmäisen vuoden aikana.

Diagrammi perustuu löydettyyn suhdelukuun  $q$  noin 0.607 ja ensimmäiseen jäsenen  $a_1$  näkyy, painuma pienenee joka vuosi geometrisen lukujonon mukaisesti.

B1-osa: Vastaa kolmeen tehtävään.  
B2-osa: Vastaa kolmeen tehtävään.



Vastauksen pituus: 1378 merkkiä.

## 11. Reunapalat 12 p.

Tuhannen palan palapelin koko on 70 cm × 50 cm. Arvioi, kuinka suuri osuus paloista on reunapaloja. Kirjoita näkyviin, mitä oletuksia arvioinnissasi teet.

Tehdäksemme arvion siitä, kuinka suuri osuus tuhannen palan palapelin paloista on reunapaloja, meidän on tehtävä joitakin oletuksia. Oletetaan, että palapeli on suorakaiteen muotoinen ja että jokainen pala on suunnilleen samankokoinen ja -muotoinen. Lisäksi oletetaan, että palapelin reunat ovat suorat, jolloin kaikki reunapalat ovat reunoilla ja kulmapalat kulmissa.

Palapelin koko on 70 cm × 50 cm. Jos palapeli koostuu tuhannesta palasta, voimme arvioida reunapalojen määrää seuraavasti:

1. Arvioidaan palojen koko. Koska meillä on 1000 palaa, ja palapelin pinta-ala on  $70 \text{ cm} \times 50 \text{ cm} = 3500 \text{ cm}^2$ , jokaisen palan keskimääräinen pinta-ala on  $3500 \text{ cm}^2 / 1000 = 3.5 \text{ cm}^2$ .
2. Oletetaan, että palat ovat suunnilleen neliön muotoisia (tämä on karkea arvio), niin jokaisen palan sivun pituus olisi noin  $\sqrt{3.5} \text{ cm}$ .
3. Seuraavaksi lasketaan, kuinka monta palaa mahtuu jokaiselle sivulle. Esimerkiksi pitkälle sivulle (70 cm) mahtuu noin  $70 \text{ cm} / \sqrt{3.5} \text{ cm}$  palaa ja lyhyelle sivulle (50 cm) mahtuu noin  $50 \text{ cm} / \sqrt{3.5} \text{ cm}$  palaa.
4. Reunapalojen määrä lasketaan summaamalla pitkien ja lyhyiden sivujen palojen määrät.

B1-osa: Vastaa kolmeen tehtävään.  
B2-osa: Vastaa kolmeen tehtävään.

(joita on neljä, koska jokainen kulmapala lasketaan kahdelle sivulle).

Lasketaan tämä.

Arviomme perusteella jokaisen palan sivun pituus on noin 1.87 cm. Pitkälle sivulle (70 cm) mahtuu noin 37.4 palaa ja lyhyelle sivulle (50 cm) noin 26.7 palaa. Tämän perusteella reunapalojen kokonaismääräksi saadaan noin 124.3, vähentäen neljä kulmapalaa, jotka lasketaan kahteen kertaan.

Tämä on vain arvio, joka perustuu oletukseen, että jokainen pala on suunnilleen samankokoinen ja -muotoinen, ja että palat ovat suurin piirtein neliön muotoisia. Todellisuudessa palapelin palojen koko ja muoto voivat vaihdella, joten tämä luku voi olla erilainen käytännössä.

Näin ollen, jos tuhannesta palasta noin 124 on reunapaloja, niin reunapalojen osuus koko palapelin palojen määrästä on noin 12.4%.

Vastauksen pituus: 1632 merkkiä.

## 12. Peruskoulujen lukumäärä Suomessa 12 p.

### Aineisto

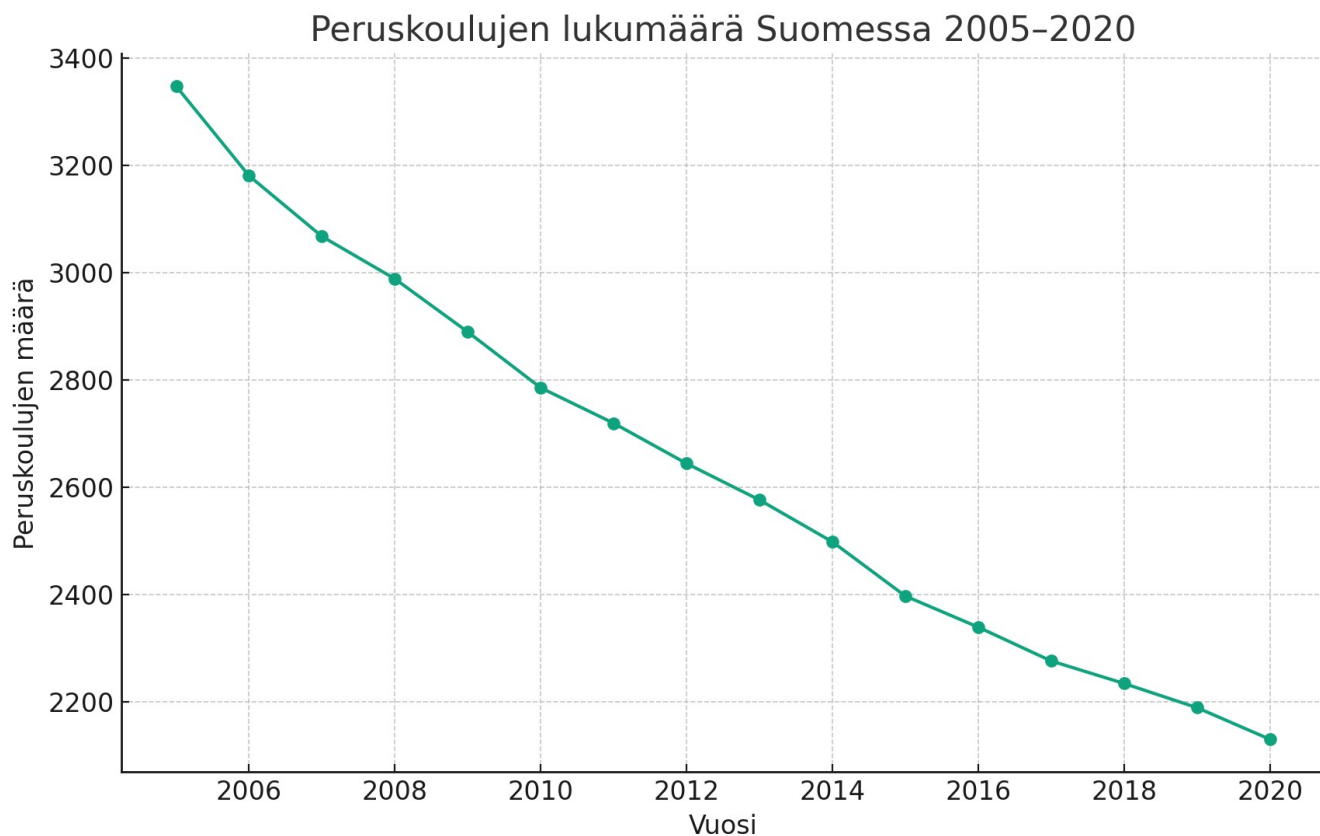
#### 12.A Taulukko: Peruskoulujen lukumäärä

Peruskoulujen lukumäärä Suomessa vuosina 2005–2020 on esitetty taulukossa 12.A.

1. Piirrä diagrammi, joka esittää peruskoulujen lukumäärät vuosina 2005–2020. (2 p.)
2. Sovita aineistoon regressiosuora  $y = a + bx$ , kun vuosi on  $x$ -akselilla ja peruskoulujen määrä  $y$ -akselilla. Selitä sanallisesti kertoimien  $a$  ja  $b$  merkitys. (4 p.)
3. Sovita aineistoon regressiosuora käyttäen vain vuosien 2005–2008 peruskoulujen lukumääriä. (2 p.)
4. Arvioi kummankin mallin perusteella vuosi, jolloin peruskoulut häviävät Suomesta. (4 p.)

Diagrammi peruskoulujen lukumäärästä vuosina 2005–2020:

Piirsin diagrammin, joka esittää peruskoulujen lukumääriä vuosittain. Diagrammista nähdään, että peruskoulujen määrä on vähentynyt jatkuvasti vuodesta 2005 vuoteen 2020.



Regressiosuoran sovitus ja kertoimien merkitys:

Sovitin regressiosuoran aineistoon yhtälöllä ( $y = a + bx$ ), jossa ( $y$ ) on peruskoulujen määrä ja ( $x$ ) on vuosi.

Kerroin ( $a$ ), joka on noin 160178, on y-akselin leikkauspiste vuonna 0 ja kuvaa peruskoulujen määrää, jos ajallista trendiä jatketaan taaksepäin aina vuoteen 0 asti.

Kerroin ( $b$ ), joka on noin -78.28, kuvaa peruskoulujen määrän vuotuista muutosta. Tämä tarkoittaa, että joka vuosi peruskoulujen määrä vähenee keskimäärin 78 koululla.

Regressiosuoran sovitus vuosien 2005–2008 aineistoon:

Sovitin myös regressiosuoran aineistoon käyttäen vain vuosien 2005–2008 tietoja.

Arvio vuodesta, jolloin peruskoulut häviävät Suomesta:

Koko aineiston perusteella sovitettu malli ennustaa, että peruskoulut häviävät Suomesta noin vuonna 2046.

Vuosien 2005–2008 aineiston perusteella sovitettu malli ennustaa, että peruskoulut häviävät noin vuonna 2033.

Vastauksen pituus: 982 merkkiä.

### 13. Kuvaajat ja derivaatta 12 p.

Funktioista  $f$  ja  $g$  tiedetään, että  $f(0) = 0$  ja  $g(0) = 5$  sekä

$$2 \leq f'(x) \leq 3 \quad \text{ja} \quad 1 \leq g'(x) \leq 2$$

kaikilla  $x$ .

1. Oletetaan, että funktioiden  $f$  ja  $g$  kuvaajat ovat suoria. Perustele graafisesti tai laskemalla, että  $4 \leq f(2) \leq 6$  ja  $7 \leq g(2) \leq 9$ . (6 p.)

2. Oletetaan, että funktioiden  $f$  ja  $g$  kuvaajat eivät välttämättä ole suoria. Mitkä seuraavi

B1-osa: Vastaa kolmeen tehtävään.  
B2-osa: Vastaa kolmeen tehtävään.



mahdollisia:

- $f(2) = g(2)$
- $f(2) < g(2)$
- $f(2) > g(2)$

Voit hyödyntää perustelussasi seuraavaa tietoa:

Jos kahdella funktiolla on sama arvo kohdassa **0** ja toisen funktion derivaatta on suurempi välillä **[0, 2]**, niin tämän funktion arvo on suurempi kohdassa **2**. (6 p.)

Oletetaan, että funktioiden  $f$  ja  $g$  kuvaajat ovat suoria:

Koska funktioiden  $f$  ja  $g$  kuvaajat ovat suoria, niiden derivaatat  $f'(x)$  ja  $g'(x)$  ovat vakioita. Tämä tarkoittaa, että funktiot  $f$  ja  $g$  ovat lineaarisia, eli niiden kuvaajat ovat suoria linjoja. Funktion  $f$  derivaatta on  $2 \leq f'(x) \leq 3$ . Koska  $f(0) = 0$  ja funktio on lineaarinen, funktion  $f$  arvo kasvaa vähintään 2 yksikköä ja enintään 3 yksikköä jokaista  $x$ -akselin yksikköä kohden. Tämä tarkoittaa, että 2 yksikköä  $x$ :n ollessa 1 ja 4 yksikköä  $x$ :n ollessa 2 (vähimmäismäärä) tai 3 yksikköä  $x$ :n ollessa 1 ja 6 yksikköä  $x$ :n ollessa 2 (enimmäismäärä). Siis  $4 \leq f(2) \leq 6$ . Funktion  $g$  derivaatta on  $1 \leq g'(x) \leq 2$ . Koska  $g(0) = 5$  ja funktio on lineaarinen, funktion  $g$  arvo kasvaa vähintään 1 yksikköä ja enintään 2 yksikköä jokaista  $x$ -akselin yksikköä kohden. Tämä tarkoittaa, että  $7 (5 + 2) \leq g(2) \leq 9 (5 + 2)$ .

Oletetaan, että funktioiden  $f$  ja  $g$  kuvaajat eivät välttämättä ole suoria:

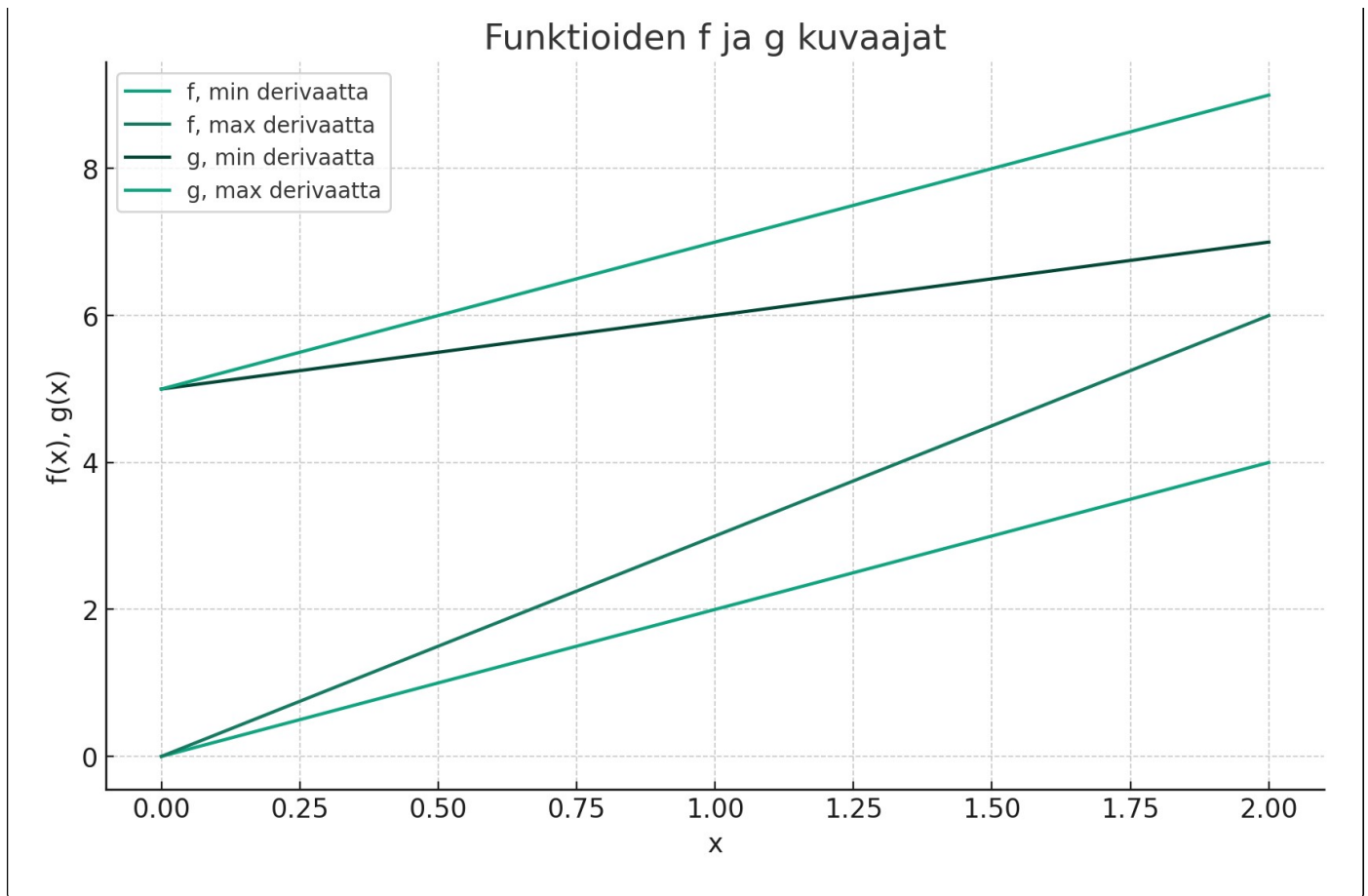
Jos kahdella funktiolla on sama arvo kohdassa 0 ja toisen funktion derivaatta on suurempi välillä  $[0, 2]$ , niin tämän funktion arvo on suurempi kohdassa 2. Koska  $f'(x)$  on suurempi kuin  $g'(x)$  välillä  $[0, 2]$ , niin on mahdollista, että  $f(2) > g(2)$ . Koska  $f(0) = 0$  ja  $g(0) = 5$ , alussa  $g$ :n arvo on suurempi kuin  $f$ :n. On kuitenkin mahdollista, että  $f$  kasvaa nopeammin ja saavuttaa tai ylittää  $g$ :n arvon kohdassa 2. Siksi  $f(2) = g(2)$  ja  $f(2) < g(2)$  ovat myös mahdollisia tilanteita. Yhteenvetona, kaikki kolme tilannetta ( $f(2) = g(2)$ ,  $f(2) < g(2)$ , ja  $f(2) > g(2)$ ) ovat mahdollisia, riippuen funktioiden tarkemmasta käyttäytymisestä välillä  $[0, 2]$ ...

Graafinen esitys funktioista  $f$  ja  $g$ , kun oletetaan, että ne ovat suoria:

Piirsin kuvaajat funktioille  $f$  ja  $g$  olettaen, että ne ovat suoria. Funktion  $f$  kuvaajat piirrettiin kahdella eri derivaatan arvolla (minimi 2 ja maksimi 3), samoin kuin funktion  $g$  kuvaajat (minimi 1 ja maksimi 2). Kuvaajasta nähdään, että funktion  $f$  arvot  $x = 2$  kohdalla ovat välillä 4 ja 6, ja funktion  $g$  arvot ovat välillä 7 ja 9, kuten alussa arvioitiin.

Arviointi, kun funktioiden  $f$  ja  $g$  kuvaajat eivät välttämättä ole suoria:

Jos funktioiden kuvaajat eivät ole suoria, kaikki kolme tilannetta ( $f(2) = g(2)$ ,  $f(2) < g(2)$ , ja  $f(2) > g(2)$ ) ovat mahdollisia. Tämä johtuu siitä, että vaikka funktion  $f$  derivaatta on suurempi kuin funktion  $g$ , alkuarvo  $f(0) = 0$  on pienempi kuin  $g(0) = 5$ . Näin ollen funktio  $f$  voi kasvaa nopeammin ja saavuttaa tai jopa ylittää funktion  $g$  arvon  $x = 2$  kohdassa, riippuen funktioiden tarkemmasta käyttäytymisestä välillä  $[0, 2]$ .



Vastauksen pituus: 2081 merkkiä.

*Kokeen tehtävät loppuvat tähän.*

**Tarkista, että vastasit ohjeiden mukaiseen määrään tehtäviä. Älä jätä mitään merkintöjä sellaisen tehtävän vastaukselle varattuun tilaan, jota et halua jättää arvosteltavaksi.**