

# Hyvän vastauksen piirteet: FI – Matematiikka, lyhyt oppimäärä

22.3.2023

## Lopulliset hyvän vastauksen piirteet 16.5.2023

Lopullisista hyvän vastauksen piirteistä ilmenevät perusteet, joiden mukaan koesuorituksen lopullinen arvostelu on suoritettu. Tieto siitä, miten arvosteluperusteita on sovellettu kokelaan koesuoritukseen, muodostuu kokelaan koesuorituksesta saamista pisteistä, lopullisista hyvän vastauksen piirteistä ja lautakunnan määräyksissä ja ohjeissa annetuista arvostelua koskevista määräyksistä. Lopulliset hyvän vastauksen piirteet eivät välttämättä sisällä ja kuvaa tehtävien kaikkia hyväksytyjä vastausvaihtoehtoja tai hyväksytyn vastauksen kaikkia hyväksytyjä yksityiskohtia. Koesuorituksessa mahdollisesti olevat arvostelumerkinnät katsotaan muistiinpanoluonteisiksi, eivätkä ne tai niiden puuttuminen näin ollen suoraan kerro arvosteluperusteiden soveltamisesta koesuoritukseen.

Hyvästä suorituksesta näkyy, miten vastaukseen on päädytty. Ratkaisussa on oltava tarvittavat laskut tai muut riittävät perustelut sekä lopputulos. Arvioinnissa kiinnitetään huomiota kokonaisuuteen, ja ratkaisu pyritään arvioimaan kolmiosaisesti: alku, välivaiheet ja lopputulos. Laskuvirheet, jotka eivät olennaisesti muuta tehtävän luonnetta, eivät alenna pistemäärää merkittävästi. Sen sijaan tehtävän luonnetta muuttavat lasku- ja mallinuvirheet saattavat alentaa pistemäärää huomattavasti.

Matemaattiset ohjelmistot ovat kokeen apuvälineitä, joiden roolit arvioidaan tehtäväkohtaisesti. Jos ratkaisussa on käytetty ohjelmistoja, sen on käytävä ilmi suorituksesta. Analysointia vaativien tehtävien ratkaisemisessa pelkkä ohjelmistolla saatu vastaus ei riitä ilman muita perusteluja. Sen sijaan ohjelmasta saatu tulos yleensä riittää rutiinitehtävissä ja laajempien tehtävien rutiiniosissa. Tällaisia ovat esimerkiksi lausekkeiden muokkaaminen, yhtälöiden ratkaiseminen sekä funktioiden derivointi ja integrointi.

## Miten pisteytysohjeita luetaan

- Ohjeen rakenne
  - Ohjeessa riviksi kutsutaan kokonaisuutta, joka päättyy oikeassa sarakkeessa olevaan pistemäärään.
  - Rivin useat pisteet on erotettu /-merkillä. Epäselvissä tapauksissa on suluissa eritelty, mistä osasta saa mitäkin pisteitä.
  - Erittelyä ei ole, jos rivillä on saman verran laskuja kuin pisteitä, tällöin yksi piste laskua kohden.
  - Jos rivillä on yksi lasku ja siihen liittyvä sanallinen perustelu, niin puolet pisteistä (pyöristettynä ylös) saa laskusta ja loput perusteluista.
  - Jos rivillä on vain yksi lasku tai kaava ja useampi piste, saa osapisteet riittävän hyvältä yrittämisestä (esim. derivaatan laskeminen osittain oikein).
  - Rivillä suluissa oleva lasku tai perustelu on lisätietoa, eikä sitä vaadita pisteiden saamiseen.
  - Suluissa olevat pisteet saa joko täyttämällä sen rivin ehdon tai seuraavalta riviltä, jos seuraava rivi on kunnossa, eikä käy eksplisiittisesti ilmi, että edellinen rivi on tehty väärin.
- Yleensä laskuvirhe vähentää pisteitä siitä rivistä, johon se kohdistuu, mutta myöhempien rivien pisteet voi saada, jos tekee laskut/päätelyt oikein omille luvuille. Poikkeukset on merkitty tekstillä **täsmälleen**. Nämä pisteet saa vain, jos tämä askel ja myös edeltävät askeleet on oikein suoritettu. Huomaa, että teksti **täsmälleen** tarkoittaa sitä, että kaikkien niiden rivien, jotka eivät ole riippumattomia, täytyy olla perusteluineen kunnossa. (Tällöin ratkaisussa on ekvivalenttia muotoilua vaille ohjeeseen merkitty luku/lauseke/tms.) Tämä ei vaikuta pyöristysten pisteyttämiseen. Jos esimerkiksi vastausrivillä lukee **täsmälleen 37**, niin myös **37,5** ja **40** kelpaavat. Tekstillä **melko täsmälleen** merkitseminen tarkoittaa sitä, että luvut ja laskut pitää olla kunnossa, mutta perusteluissa ja selityksissä voi olla puutteita.

- Rivien riippuvuus toisistaan
  - Yleensä pisteytys on kirjoitettu ratkaisun matemaattisen etenemisen mukaisesti ja (täysiä) pisteitä annetaan vain perustelluista askeleista. Jos rivit ovat ilmeisen riippumattomia toisistaan (esim. laskettu eri funktioiden derivaatat), niin pisteet annetaan suoritusjärjestyksestä riippumatta ilman eri merkintää.
  - Jos vastaus on kirjoitettu ennen perusteluja, tarkoittaa se, että pelkästä (oikeasta) vastauksesta saa jo pisteitä.
  - Merkintä **ylläolevista riveistä riippumaton piste** tarkoittaa, että rivin pisteet voi antaa edellä olevista riveistä riippumattomasti; seuraavat rivit edellyttävät tätä riviä normaaliin tapaan.
  - Merkintä **riippumaton** tarkoittaa, että rivin pisteet voi antaa edellä olevista riveistä riippumattomasti; seuraavat rivit eivät edellytä tätä riviä.
  - Merkintä **Johtopäätöksenä**: korostaa, että kyseiset pisteet saa vain, jos aiemmat perustelut ovat kunnossa.
- Terminologiaa
  - "Vastaus riittää" tarkoittaa, että oikeasta vastauksesta annetaan pisteet myös ilman perusteluja. Jos vastaus on väärin, voi pisteitä saada normaalien periaatteiden mukaisesti perustelujen perusteella.
  - "Alkupisteitä" tarkoittaa, että tästä voi antaa rivin pisteet, jos ei muualta saa pistettä. Tätä pistettä ei siis voi yhdistää muihin pisteisiin.
  - "maxN" tarkoittaa, että tämän tyyppisestä ratkaisusta annetaan N pistettä, mikäli siinä ei ole muita virheitä.
  - "Vastaus vain likiarvona" tarkoittaa, että ratkaisussa ei ilmene lainkaan vastauksen tarkkaa arvoa.

Seuraavat vähennykset ovat tehtäväkohtaiseen pisteohjeeseen toissijaisia. Yhteen tehtävään voi soveltaa useaa vähennystä, mutta ansaittuja pisteitä ei voi menettää.

- Vastaus oikein, muttei pyydettyssä muodossa (esim. tarkkuus, yksikkö) —1 p.
- Vastaus sieventämättä loppuun asti sievennystehtävässä (esim.  $e^1$ ,  $\ln(e)$  tai  $4^0$ ) —2 p.
- Vastaus sieventämättä muussa tehtävässä (esim.  $e^1$ ,  $\ln(e)$  tai  $4^0$ ) —1 p.
- Ilmeiset näppäilyvirheet esityksessä (esim.  $x = 2, y04$ ), tai näppäilyvirheet, jotka korjataan heti seuraavalla rivillä —0 p.
- Vastauksessa kopiointivirhe —1 p.
- Välipyöristyksessä ei yhtä enemmän merkitseviä numeroita kuin vastauksessa —1 p.

Seuraavat vähennykset ovat tehtäväkohtaiseen pisteohjeeseen toissijaisia. Yhteen tehtävään voi soveltaa useaa vähennystä, mutta kutakin korkeintaan kerran.

- Matemaattisesti puutteellinen merkintä (esim. puuttuvat sulut, mutta laskettu oikein; =-merkin ketjutus,  $m^2$  ilman m). Huom.! Tilanteesta riippuen epästandardi merkintä voidaan hyväksyä selitettynä. —1 p.
- Ratkaisusta puuttuu oleellisia selityksiä (lukija joutuu arvaamaan, mitä ratkaisussa esiintyvät luvut tarkoittavat) TAI perustelut ja johtopäätökset on esitetty täysin irrallisina (lukija joutuu yhdistelemään eri puolilla ratkaisua olevia lauseita) —1 p.
- Ratkaisussa merkittävästi ylimääräistä tekstiä/laskuja (lukija joutuu päättämään, miten annetuista tiedoista muodostuu ratkaisu) —1 p.

#### Kolmisarakkeisen lukuohjeet:

- Ideasarakkeesta saa pisteet, jos on ryhdytty tekemään mainittua asiaa, vaikka toteutus olisi puutteellinen.
- Lasku tai kaava toteutussarakkeessa näyttää, miltä idea oikein toteutettuna näyttää.
- Pysäytysehto: jokaiselta riviltä saatava vähintään puolet rivin pisteistä pyöristettynä alaspäin, jotta voi jatkaa.

- Jos pysäytysehto ei toteudu, eli seuraavien rivien pisteitä on vielä jaossa, on seuraavilta riveiltä saatavissa kaikki pisteet, joissa ei ole eksplisiittistä estettä sille, miksi niitä ei voisi saada.

## Sisällys

### A-osa

1. Perusyhtälöitä 12 p.
2. Yhtälöiden ratkaisut 12 p.
3. Prosentteja 12 p.
4. Tasakylkinen kolmio 12 p.

### B1-osa

5. Erikoiset mittayksiköt 12 p.
6. Lahjavero 12 p.
7. Kolikko ja noppa 12 p.
8. Paraabelin tangentti 12 p.
9. Älypuhelinien käyttöikä 12 p.

### B2-osa

10. Hirsitalo painuu kokoon 12 p.
11. Reunapalat 12 p.
12. Peruskoulujen lukumäärä Suomessa 12 p.
13. Kuvaajat ja derivaatta 12 p.

### Koe yhteensä

120 p.

## A-osa

### 1. Perusyhtälöitä 12 p.

Alla on kuusi osatehtävää 1.1–1.6. Kirjoita kunkin osatehtävän vastauskenttään pelkkä laskun lopputulos ilman välivaiheita ja perusteluja. Jokaisen osatehtävän vastaus on kokonaisluku.

Tehtävässä ei voi käyttää kuvakaappauksia eikä kaavaeditoria. Kunkin vastauksen maksimipituus on 5 merkkiä. Vastaukset arvostellaan tietokoneavusteisesti, ja ohjeiden noudattamatta jättäminen voi johtaa pistevähennyksiin. Jokaisesta osatehtävästä voi saada 2 pistettä.

#### 1.1 Laske 2 p.

- 55 (2 p.)

#### 1.2 Yhtälön $5x - 2 = 13$ ratkaisu on 2 p.

- 3 (2 p.)

#### 1.3 Suora $y = -2x + 14$ leikkaa $x$ -akselin, kun 2 p.

- 7 (2 p.)

14 (laskettu milloin suora leikkaa  $y$ -akselin)

1 p.

(7, 0)

1 p.

$y = 7$

1 p.

$\pm 7$ , tms.

1 p.

1.4 Yhtälön  $x^2 = 8x$  suurempi ratkaisu on 2 p.

- 8 (2 p.)

0

1 p.

0 tai 8

1 p.

1.5 Potenssiyhtälön  $x^3 = 64$  ratkaisu on 2 p.

- 4 (2 p.)

1.6 Eksponenttiyhtälön  $2^x - 128 = 0$  ratkaisu on 2 p.

- 7 (2 p.)

### Tehtävän erillisohjeet

Kussakin kohdassa  $-1$ , jos merkkimäärä ylittyy tai esim. kirjoitettu välivaiheita.

## 2. Yhtälöiden ratkaisut 12 p.

1. Ratkaise yhtälöpari

$$\begin{cases} x + y = 8 \\ 2x - y = 1. \end{cases}$$

(4 p.)

2. Ratkaise yhtälö  $2x^2 - \frac{5}{2}x + \frac{1}{4} = 0$ . Anna suurempi juuri tarkkana arvona sievennetyssä muodossa ja pienempi juuri likiarvona kahden desimaalin tarkkuudella. (8 p.)

Laskettu puolittain yhteen tai ratkaistu yksi muuttuja toisen avulla.

1 p.

Saadaan  $3x = 9$ , joten  $x = 3$  (tai ratkaistu  $y = 5$ ).

1 p.

Sijoitetaan tämä ensimmäiseen yhtälöön, jolloin saadaan  $y = 5$  (tai  $x = 3$ ).

2 p.

TAI

Vastaus  $x = 3$  ja  $y = 5$ .

1 p.

Tarkistukset sijoittamalla molempiin yhtälöihin (1 p./yhtälö).

2 p.

Perusteltu yksikäsitteisyys.

1 p.

Kerrotaan yhtälö puolittain neljällä, jolloin saadaan  $8x^2 - 10x + 1 = 0$ .

(1 p.)

Käytetään toisen asteen yhtälön ratkaisukaavaa, jolloin ratkaisuksi saadaan

$$x = \frac{10 \pm \sqrt{(-10)^2 - 4 \cdot 8 \cdot 1}}{2 \cdot 8} \left( = \frac{5 \pm \sqrt{17}}{8} \right). \text{ (Idea lukuarvoilla ja onnistunut sijoitus: 1+2)}$$

3 p.

Sievennetty suurempi juuri:  $\frac{5+\sqrt{17}}{8}$  ( $\frac{2,5+\sqrt{4,25}}{4}$  tai vastaava 1 p.).

2 p.

Pienemmän juuren likiarvo:  $\left[ \frac{5-\sqrt{17}}{8} \approx \right] 0,11$ . (Tämä tarkkuus vaaditaan.)

2 p.

### Osatehtävän erillisohjeet

Ensimmäisen rivin suluissa olevan pisteen voi saada, jos toiselta riviltä saa vähintään yhden pisteen, eikä ensimmäinen rivi ole väärin.

Likiarvossa muu tarkkuus tai toinen desimaali väärin.

-1 p.

Molemmat likiarvoina Speedcrunchilla: 1+2+0+2

max 5 p.

Siirretty likiarvoihin ennen toisen asteen yhtälön ratkaisukaavaan sijoitusta: 1+1+1+2

max 5 p.

Ratkaisukaavan sisällä esiintyy  $x$ , kun kokelas ei ole tehnyt ensimmäistä riviä

max 0 p.

Koska tehtävänannossa ei erikseen pyydetty kertomaan, kumpi juurista on suurempi ja kumpi pienempi, riittää antaa suurempi juuri tarkassa ja sievennetyssä muodossa ja pienempi likiarvona.

## 3. Prosentteja 12 p.

- Vuonna 2019 sairaanhoitajan keskimääräinen kuukausipalkka oli 2 535 euroa. Eräs sairaanhoitaja sai 6 prosenttia keskimääräistä parempaa palkkaa. Hänen nettopalkkansa, eli tilille kuukausittain maksettava summa, oli 1 777,25 euroa. Kuinka monta prosenttia palkasta meni veroihin ja muihin pidätettäviin maksuihin? (6 p.)
- Vuonna 2021 koronaviruskotitestin arvonlisävero oli 24 % ja myyntihinta 5,60 euroa. Tutkijaryhmä ehdotti testien arvonlisäveron alentamista 10 %:iin. Kuinka paljon tuote maksaa, jos tällainen veron muutos siirtyy täysimääräisesti hintaan? (6 p.)

Sairaanhoitajan palkka on  $1,06 \cdot 2\,535 (= 2\,687,10)$  euroa. Pisteiden jakautuminen: kerroin  $1,06$  1 p. ja oikea tulo 1 p.

2 p.

Pidätysprosentti on siis  $\frac{2\,687,10 - 1\,777,25}{2\,687,10} = \frac{909,85}{2\,687,10} = 0,33859 \dots \approx 34 \%$ . Pisteiden jakautuminen: oman bruttopalkan ja nettopalkan erotus 1 p., erotuksen ja bruttopalkan osamäärä 1 p., osamäärän tulos 1 p., tulos muutettu prosenteiksi ja pyöristetty 1 p.

4 p.

TAI

Sairaanhoitajan palkka on  $1,06 \cdot 2\,535 (= 2\,687,10)$  euroa. Pisteiden jakautuminen: kerroin  $1,06$  1 p. ja oikea tulo 1 p.

2 p.

Nettopalkan osuus bruttopalkasta on  $\frac{1\,777,25}{2\,687,10} (= 0,6614 \dots)$

2 p.

Pidätysprosentti on  $1 - \frac{1\,777,25}{2\,687,10} (= 0,33859 \dots) \approx 34 \%$ .

2 p.

### Osatehtävän erillisohjeet

Erikoistapaus: Toisella pisterivillä käytetty laskussa bruttopalkkana lukua  $2\,535$ . Pisteiden jakautuminen: pisteet erotuksesta ja osamäärästä, toiselta riviltä:

max 2 p.

Kotitestin veroton hinta on  $\frac{5,60}{1,24}$ . Pisteiden jakautuminen: kerroin  $1,24$  tai  $0,24$  1 p., veroton hinta  $\cdot 1,24 = 5,6$  1 p., osamäärä  $5,6/1,24$  1 p. (Jos ratkaisussa käytetään yhtälöä: Veroton hinta  $x$  ja myyntihinta  $1,24x$  1 p., yhtälö  $1,24x = 5,60$  1 p.,  $x = 4,5161 \dots$  1 p.)

3 p.

Kun arvonlisävero on pienempi, hinta on siis  $\frac{5,60}{1,24} \cdot 1,1 \approx 4,97$  euroa. Vain tämä tarkkuus hyväksytään.

Pisteiden jakautuminen: kerroin **1,1** (1 p. riippumaton piste), veroton hinta luvulla **1,1** kerrottu 1 p., vastaus ja pyöristys sentin tarkkuuteen 1 p.

3 p.

#### Osatehtävän erillisohjeet

Veroton hinta pyöristetty arvoon **4,52**

-0 p.

Erikoistapaukset:

$$5,6 \cdot 1,1 = 6,16 \text{ euroa}$$

max 1 p.

$$0,76 \cdot 5,6 \cdot 1,1 \approx 4,68 \text{ TAI } 0,76 \cdot 5,6 \approx 4,26 \text{ ja } 4,26 \cdot 1,1 \approx 4,69 \text{ (0+3)}$$

max 3 p.

$$0,86 \cdot 5,6 \approx 4,82$$

0 p.

## 4. Tasakylkinen kolmio 12 p.

Kolmion  $ABC$  sivut  $AB$  ja  $AC$  ovat 6 senttimetriä pitkiä, ja niiden välinen kulma on  $\alpha$ . Piste  $D$  sijaitsee sivulla  $AB$  niin, että jana  $CD$  on kohtisuorassa sivua  $AB$  vastaan.

- Määritä janan  $CD$  pituus, kun  $\alpha = 30^\circ$ . (4 p.)
- Määritä sellainen  $\alpha$ , että kolmion  $BCD$  pinta-ala on puolet kolmion  $ABC$  pinta-alasta. (4 p.)
- Määritä janan  $CD$  pituus, jos kolmion  $BCD$  pinta-ala on kolmasosa kolmion  $ABC$  pinta-alasta. (4 p.)

Hahmotettu kysymys oikein (esimerkiksi kuva suorakulmaisesta kolmiosta  $ACD$ , jonka terävät kulmat ovat **30** astetta ja **60** astetta). Tämän pisteen saaminen edellyttää sitä, että vähintään implisiittisesti käy ilmi, että kysymys on suorakulmaisesta kolmiosta, esimerkiksi kolmioon on myöhemmin yritetty soveltaa Pythagoraan lausetta tai trigonometriaa.

(1 p.)

Koska kolmion hypotenuusan pituus on **6** (cm),

(1 p.)

saadaan janan  $CD$  pituus yhtälöstä  $\sin 30^\circ = \frac{|CD|}{6}$ ,

1 p.

joten kysytty pituus on **täsmälleen 3** (cm).

1 p.

Kolmioilla on sama korkeus TAI hyvä kuva TAI pienempien kolmioiden pinta-alat yhtäsuuret TAI yhtälö

(1 p.)

$$\frac{1}{2}|DB| \cdot |CD| = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}|AB| \cdot |CD|.$$

Piste  $D$  jakaa janan  $AB$  kahteen yhtä pitkään osaan.

1 p.

Muodostettu esimerkiksi yhtälö  $\cos \alpha = \frac{|AD|}{|AC|} = 3/6$ .

1 p.

Ratkaistu yhtälö ja saatu kulman suuruudeksi **täsmälleen 60** astetta TAI **täsmälleen  $\pi/3$**  radiaania.

1 p.

TAI

Kolmioilla on sama korkeus TAI hyvä kuva TAI pienempien kolmioiden pinta-alat yhtäsuuret TAI yhtälö

(1 p.)

$$\frac{1}{2}|DB| \cdot |CD| = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}|AB| \cdot |CD|.$$

Piste  $D$  jakaa janan  $AB$  kahteen yhtä pitkään osaan.

1 p.

Päätelty, että pienet kolmiot  $BCD$  ja  $ACD$  ovat yhdenmuotoisia.

1 p.

Perusteltu, että kolmio  $ABC$  on tasasivuinen ja saatu kulman suuruudeksi **täsmälleen 60** astetta TAI **täsmälleen  $\pi/3$**  radiaania.

1 p.

#### Osatehtävän erillisohjeet

Oikea arvaus ja tarkistus (voi saada vain 0 tai 2 p.)

2 p.

Oikea yhtälö, esimerkiksi  $\frac{|BD|}{|AB|} = \frac{1}{3}$ .

Päätelty, että  $|AD| = 4$  (cm).

Oikein tehty sijoitus Pythagoraan lauseeseen:  $\sqrt{6^2 - 4^2} (= \sqrt{20})$ .

$|CD| = 2\sqrt{5}$  TAI  $= \sqrt{20}$  TAI  $\approx 4,4721 \dots$  (cm) (4 tai tarkempi vastaus käy).

**Osatehtävän erillisohjeet**

Alkupiste hyvästä kuvasta.

1 p.

1 p.

1 p.

1 p.

1 p.

**Tehtävän erillisohjeet**

Pelkkä vastaus

0 p.

## B1-osa

### 5. Erikoiset mittayksiköt 12 p.

Tämä tästä -ajankohtaishuumoriorhjan jaksossa 119 kerrottiin, että Helsingin alle mahtuu huoltotunneleihin ja muihin tiloihin 500 eduskuntataloa. Eduskuntatalon tilavuus puolestaan kuvailtiin seuraavasti: "Tavallinen kylpyamme, jollainen voi olla kotona tai hotellihuoneessa, on tilavuudeltaan noin 300 litraa – Jos sinulla on 120 000 tällaista kylpyammetta, niin ne täyttävät neljäsosan eduskuntatalosta."

1. Mikä on eduskuntatalon tilavuus kuutiometreinä? (6 p.)

2. Usein kuulee verrattavan pinta-aloja jalkapallokenttien kokoon. Jalkapallokenttä on suorakulmio, jonka sivujen pituudet ovat 105 metriä ja 68 metriä. Oletetaan, että huoltotunnelit ja muut tilat ovat suorakulmaisia särmiöitä. Jos huoltotunnelien ja muiden Helsingin alla olevien tilojen korkeus on keskimäärin 4,0 metriä, niin mikä on niiden pohjien yhteenlaskettu pinta-ala jalkapallokenttinä mitattuna? (6 p.)

**riippumaton** Yksikkömuunnos tehty oikein litroista kuutiometreiksi.

120 000 kylpyammeen tilavuus on  $300 \cdot 120\,000$  (litraa),

joten eduskuntatalon tilavuus on  $300 \cdot 120\,000 \cdot 4$

omasta mielekkästä tilavuuslaskusta oikea tulos ( $= 144\,000\,000$  l).

Vastaus **melko täsmälleen**  $144\,000$  ( $\text{m}^3$ ) TAI **melko täsmälleen**  $\approx 140\,000$  ( $\text{m}^3$ ) TAI **melko täsmälleen**  $\approx 100\,000$  ( $\text{m}^3$ ). Vain nämä tarkkuudet hyväksytään.

**Osatehtävän erillisohjeet**

Pelkkä vastaus

Selityksiä ei vaadita.

1 p.

(1 p.)

2 p.

1 p.

1 p.

0 p.

Huoltotunnelien tilavuus on  $500 \cdot 144\,000 = 72\,000\,000$   $\text{m}^3$ .

Niiden pohjien yhteispinta-ala on siis  $\frac{72\,000\,000}{4} = 18\,000\,000$   $\text{m}^2$ .

**riippumaton** Yhden jalkapallokentän pinta-ala on  $105 \cdot 68$   $\text{m}^2$ ,

joten huoltotunnelien yhteispinta-ala on  $\frac{18\,000\,000}{105 \cdot 68}$  ( $\approx 2\,521$ )

$\approx 2\,500$  TAI  $\approx 3\,000$  jalkapallokenttää. (Vain nämä tarkkuudet hyväksytään.)

TAI

Huoltotunnelien tilavuus on  $500 \cdot 144\,000 = 72\,000\,000$   $\text{m}^3$

2 p.

1 p.

(1 p.)

1 p.

1 p.

2 p.



- riippumaton** Yhden jalkapallokentän pinta-ala on  $105 \cdot 68 \text{ m}^2$  (1 p.)
- 4 metriä korkean jalkapallokentän tilavuus on  $4 \cdot 105 \cdot 68 \text{ m}^3$ , 1 p.
- joten huoltotunneleihin menee  $\frac{7200000}{4 \cdot 105 \cdot 68} (\approx 2521)$  1 p.
- $\approx 2500 \approx 3000$  jalkapallokenttää. (Vain nämä tarkkuudet hyväksytään.) 1 p.

**Osatehtävän erillisohjeet**

Jos lähtöarvo on pyöristetty ja siinä on korkeintaan kaksi merkitsevää numeroa. max 5 p.

Jos ratkaisussa on vain laskut ilman selityksiä. max 5 p.

Lähtöarvon virhe periytyy osatehtävästä 5.1 (käytetty tarkkaa tai vähintään kolmen merkitsevän numeron tarkkuutta). max 6 p.

**6. Lahjavero 12 p.**

Lahjaveroa on maksettava, kun omaisuus siirtyy toiselle henkilölle lahjana ja lahjan arvo on 5 000 euroa tai enemmän. Lahjavero määräytyy taulukossa 6.A esitetyn mukaisesti. Tarkastellaan tilanteita, joissa annetaan vain yksi lahja.

1. Mikä on 80 000 euron lahjan veron määrä? Kuinka monta prosenttia tästä lahjasta maksetaan veroa? (6 p.)
2. Kuinka suuresta lahjasta maksetaan 4 000 euroa lahjaveroa? (6 p.)

Lahjaveron määrä on  $4700 + (80\,000 - 55\,000) \cdot 0,12 = 7700$  (euroa). 3 p.

Veroprosentti on siis  $\frac{7\,700}{80\,000} = 0,09625 \approx 9,6 \%$ . 3 p.

TAI

Alarajan ylittävä osa on  $80\,000 - 55\,000 = 25\,000$ .

Alarajan ylittävän osan vero on  $0,12 \cdot 25000 = 3000$ .

Vero yhteensä  $4700 + 3000 = 7700$ .

Vero jaettu luvulla 80 000 (oikea lasku  $\frac{7700}{80000}$ ).

Omasta mielekkästä laskusta oikea tulos ( $\approx 0,09625$ ), joka välillä (0, 1).

**Johtopäätöksenä:** Tulos muutettu oikein prosenteiksi ja pyöristetty ( $\approx 9,6 \%$ ).

**Osatehtävän erillisohjeet**

Luettu kaikki tiedot väärältä taulukon riviltä: (0+0+1+1+1+1) max 4 p.

Huomioimatta, miten veroluokan alaraja käyttäytyy, esimerkiksi vain  $\frac{(80000-55000) \cdot 0,12}{80000}$  (1+1+0+1+0+0) tai  $(80000 \cdot 0,12 + 4700)/80000$  (0+1+1+1+0+0). max 3 p.

Alkupiste: Luettu oikeaa riviä, esimerkiksi tulot kuuluvat luokkaan 55 000 – 200 000 TAI alarajan vero on 4700 TAI veroprosentti on 12. 1 p.

Lahjan suuruus on välillä 25 000 – 55 000.

Jos  $x$  on lahjan suuruus, niin alarajan ylittävä osa on  $x - 25\,000$ .

Veron suuruus on  $1700 + 0,1 \cdot (x - 25000)$

Muodostettu veron suuruudesta yhtälö  $1700 + 0,1 \cdot (x - 25\,000) = 4000$

Oma yhtälö ratkaistu oikein laskimella tai yhtälönratkaisun keinoin, ( $x = 48\,000$ )

TAI

Lahjan suuruus on välillä 25 000 – 55 000.

(1 p.)

(1 p.)

1 p.

1 p.

2 p.

1 p.



Alarajan ylittävän osan vero $4000 - 1700 = 2300$ .	1 p.
Tämä vero on <b>10 %</b> alarajan ylittävästä osasta	1 p.
Alarajan ylittävä osa on $10 \cdot 2300 = 23000$ .	1 p.
$25000 + 23000 = 48000$	2 p.
<b>Osatehtävän erillisohteet</b>	
Huomioimatta, miten veroluokan alaraja käyttäytyy, esim. vain $0,1(x - 25000) = 4000$ ( $1+1+0+1+0$ ) tai $1700 + 0,1x = 4000$ ( $1+0+1+1+0$ ).	max 3 p.
Ratkaisu alkaa suoraan yhtälöstä $1700 + 0,1 \cdot (x - 25\ 000) = 4000$ .	max 6 p.
Ratkaisu alkaa vastauksella 48 000. Sitten osoitetaan, että tällöin vero on 4000.	max 4 p.
Yhtälö tai tehtävä on ratkaistu haarukoimalla.	max 5 p.

**Tehtävän erillisohteet**

Pieni epäjohtonmukaisuus prosenttimerkin kanssa, esim $7700/80000 \cdot 100 = 9,625 \approx 9,6 \%$ .	-0 p.
-------------------------------------------------------------------------------------------------------	-------

**7. Kolikko ja noppa 12 p.**

Pelissä heitetään kolikkoa ja tavallista noppaa.

1. Mikä on todennäköisyys sille, että pelaaja A saa yhdellä kolikonheitolla klaavan ja pelaaja B yhdellä nopanheitolla silmäluvun 5? (4 p.)
2. Pelaaja C väittää pelaajalle D: "On todennäköisempää, että minä saan kahdella kolikonheitolla kaksi klaavaa kuin että sinä saat kahdella nopanheitolla summaksi vähintään yhdeksän." Onko pelaaja C oikeassa? (8 p.)

Pelaajan A klaavan todennäköisyys on $\frac{1}{2}$ .	1 p.
Pelaajan B silmäluvun <b>5</b> todennäköisyys on $\frac{1}{6}$ .	1 p.
Nämä molemmat tapahtuvat siis todennäköisyydellä $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{6}$ .	2 p.
Vastaus <b>melko täsmälleen</b> $\frac{1}{12}$ TAI <b>melko täsmälleen</b> <b>8,3 %</b> TAI <b>melko täsmälleen</b> <b>0,083</b> (kaikki tarkkuudet käyvät).	1 p.
<b>Osatehtävän erillisohteet</b>	
Pelkät lukuarvot ilman mitään selitystä tai puutteellinen selitys esim. $P(A \text{ saa klaavan ja } B \text{ saa silmäluvun } 5) = 1/2 \cdot 1/6 = \dots$	-1 p.
Murtoluku $1/6$ oltava näkyvissä, muuten	-1 p.
Rivin 3 pisteet saa kertomalla omat todennäköisyydet väliltä $(0, 1)$ .	

Todennäköisyys, että pelaaja C saa kaksi klaavaa on $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$ TAI <b>25 %</b> TAI <b>0,25</b> (perustelu + vastaus).	2 p.
Pelaajan D kaikkien mahdollisuuksien lukumäärä on $(6 \cdot 6 =) 36$ .	1 p.
Suotuisat tapaukset ovat: <b>(3, 6), (4, 5), (4, 6), (5, 4), (5, 5), (5, 6), (6, 3), (6, 4), (6, 5)</b> och <b>(6, 6)</b> .	2 p.
Todennäköisyys saada 9 tai enemmän on siis $\frac{10}{36}$ .	1 p.
Koska $\frac{10}{36} > \frac{9}{36} = \frac{1}{4}$ TAI <b>27,8 %</b> $> 25 \%$ TAI <b>0,278</b> $> 0,25$ ,	(1 p.)
on pelaaja C väärässä. Tämän pisteen saamiseen sovelletaan <b>melko täsmälleen</b> -ehtoa.	1 p.
<b>Osatehtävän erillisohteet</b>	

Pelkkä lasku ilman mitään selitystä.

-1 p.

Riviltä 3 saa 2 p., jos täsmälleen suotuisat parit esitetty listassa, taulukossa tms.; 1 p., jos vain osa (vähintään 4) suotuisista pareista esitetty tai joukossa ylimääräisiä.

Jos laskettu todennäköisyys  $P(D \text{ saa tasan } 9)$  tai  $P(D \text{ saa yli } 9)$ , **max** 2+1+1+0+1+0.

max 5 p.

Jos vain sanottu, että suotuisia on 10 ilman listaa, taulukkoa tai muuta perustelua, **max** 2+1+0+1+1+1.

max 6 p.

Jos vain sanottu, että suotuisia on 4 tai 6 ilman listaa, taulukkoa tai muuta perustelua, **max** 2+1+0+0+1+0.

max 4 p.

## 8. Paraabelin tangentti 12 p.

Paraabeli  $y = x^2 + bx + c$  kulkee pisteen  $(9, 5)$  kautta, ja siinä sen tangentin kulmakerroin on 2. Määritä kertoimet  $b$  ja  $c$  derivaatan avulla.

**riippumaton** Sijoitettu pisteen  $(9, 5)$  koordinaatit paraabelin yhtälöön, saatu  $9^2 + 9b + c = 5$  (1 p./oikein sijoitettu koordinaatti).

2 p.

Lisähuomio: Jos sijoitettu  $x$  ja  $y$  väärin päin.

1 p.

Derivoitu ja saatu  $2x + b$ . Termit  $2x$  (1 p.),  $b$  (1 p.), kokonaan oikein (1 p.)

3 p.

Derivaatafunktion on oltava 1. asteen polynomifunktio, jotta voi jatkaa.

Merkitty virheellisesti  $y = 2x + b$ .

-0 p.

Merkitty derivaatan arvoksi 2.

1 p.

Jos edellistä riviä ei ole, ei voi saada pisteitä tämän rivin jälkeen.

**Johtopäätöksenä:** Sijoitettu  $x$ :n arvoksi 9 omaan derivaattaan:  $2 \cdot 9 + b = 2$ , (1 p.) ja ratkaistu oma yhtälö oikein (2 p.) ( $b = -16$ ).

3 p.

Oma  $b$  sijoitettu paraabelin yhtälöön.

1 p.

Ratkaistu  $c$  omasta yhtälöstä ( $c = 68$ ).

2 p.

### Tehtävän erillisohjeet

Tangenttisuoran yhtälö muodostettu.

+0 p.

Geogebrian liukusäädinkokeilut

+0 p.

Derivaatan nollakohdat

+0 p.

Mallikuva

+0 p.

## 9. Älypuhelinien käyttöikä 12 p.

Älypuhelinien keskimääräiset käyttöiät eräissä maissa on esitetty taulukossa 9.A.

1. Laske taulukossa esitettyjen keskimääräisten käyttöikäien keskiarvo  $\bar{x}$  ja keskihajonta  $s$ . (4 p.)

2. Miksi osatehtävässä 9.1 laskettu keskiarvo  $\bar{x}$  ei tuota kyseisten maiden älypuhelinien käyttöikäien keskiarvoa? (4 p.)

3. Oletetaan, että älypuhelinien käyttöikä koko maailmassa noudattaa normaalijakaumaa, jonka odotusarvo on 23 kuukautta ja keskihajonta 2,55 kuukautta. Millä todennäköisyydellä satunnaisesti valitun älypuhelimien käyttöikä on vähintään kolme vuotta? (4 p.)

Keskiarvo on  $\bar{x} = 21$  (kuukautta). Tämä tarkkuus vaaditaan.

1 p.

**riippumaton** Keskiarvon perustelu.

1 p.

**riippumaton** Keskihajonta on  $s \approx 2,26$  TAI  $\sigma \approx 2,14$  (vastauksessa korkeintaan 3 desimaalia).

**riippumaton** Keskihajonnan perustelu.

#### Osatehtävän erillisohjeet

Pelkkä kaava ilman lukujen sijoitusta ei anna pisteitä.

Oikeasta perustelusta voi saada pisteen, vaikka se sisältäisi pienen virheen (laskuvirhe, yksi luku unohtunut, yksi yhteenlasku muuttunut kertolaskuksi, keskihajonnasta puuttuu neliöjuuri tms.).

Omista laskuista keskiarvo pyöristetty 20 kuukauteen. Pisteet riveiltä 1 ja 2.

Perusteluksi kelpaa kuvakaappaus. Vastauksia varten luvut pitää poimia kuvakaappauksesta.

Esimerkkikuvakaappaus ohjelmasta:

n	10
Mean	21
$\sigma$	2.144761059
s	2.260776661
$\Sigma x$	210
$\Sigma x^2$	4456
Min	18
Q1	19
Median	21
Q3	22
Max	26

1 p.

1 p.

Eri maissa on eri määrä älypuhelimia/asukkaita. (Tästä syystä keskiarvo ei ole sama kuin kaikkien maiden älypuhelimien käyttöikien keskiarvo.) TAI Vertailtu kahta maata ja todettu, että niissä on eri määrä älypuhelimia.

#### Osatehtävän erillisohjeet

Esimerkkejä osapisteistä:

"Pitää laskea painotetulla keskiarvolla" TAI "Koska lasketaan keskiarvojen keskiarvo."

2 p.

"Koska taulukon luvut ovat yhden maan keskiarvoja." TAI "Maiden keskiarvot eivät ole samoja." TAI "Käytettynä otetut puhelimet eivät ole mukana tilastossa." TAI "Jossain kohdassa tehty pyöristys vaikuttaa."

0 p.

Jos vastauksessa on useampi selitys, niin paras selitys huomioidaan. Arvostelussa on voitu käyttää yleisvähennystä esimerkiksi ylimääräisen tekstin vuoksi.

Kolme vuotta on 36 kuukautta.

Oikea väli  $X \geq 36$ .

**riippumaton** Käytetään (käsin tai ohjelmalla) normaalijakaumaa, jossa keskiarvoa (23) ja keskihajontaa (2,55) on käytetty oikein.

**riippumaton** Vastaus oikein  $\approx 0,000\,000\,17$ . Kaikki tarkkuudet paitsi 0 kelpaavat.

#### Osatehtävän erillisohjeet

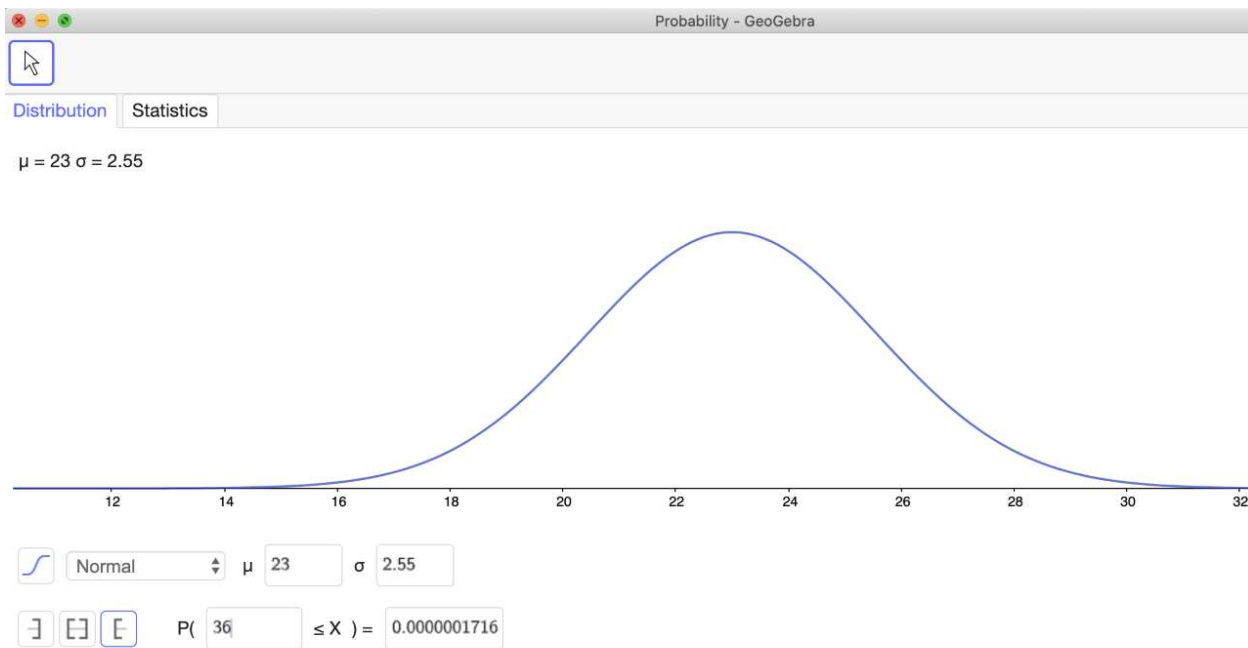
Esimerkiksi komento **normCdf(36,  $\infty$ , 23, 2.55)** tai alla oleva esimerkkikuva ohjelmasta antaa pisteet kolmelta ensimmäiseltä riviltä.

(1 p.)

1 p.

1 p.

1 p.



Kaikki luvut voi myös muuttaa vuosiksi. Jos vain keskiarvo tai keskihajonta muutettu, niin annetaan max 1 p.  
"oikea väli  $X \geq 3$ " (0+1+0+0).

max 1 p.

## B2-osa

### 10. Hirsitalo painuu kokoon 12 p.

Hirsitalon rakentamisessa pitää huomioida, että rakennus painuu kokoon muutaman vuoden ajan. Tämä tehdään jättämällä rako eli niin sanottu painumavara esimerkiksi ovien ja ikkunoiden päälle. Eräs uuden hirsitalon omistaja arvioi, että hirsien painumista tapahtuu kahdeksan vuoden ajan ja vuotuiset painumat muodostavat geometrisen lukujonon. Hänen talonsa painumavara on 6,0 cm.

1. Auta talon omistajaa esittämällä geometrisen lukujono, joka kuvaa talon vuosittaista painumista. Lukujono täyttää seuraavat ehdot:

- Ensimmäinen jäsen kuuluu välille [2,0 cm; 3,0 cm].
- Kahdeksan ensimmäisen jäsenen summa  $S$  kuuluu välille [5,0 cm; 6,0 cm].

Ilmoita vastauksessa lukujonon suhdeluku  $q$  ja osoita laskulla, että summa  $S$  kuuluu vaaditulle välille. (8 p.)

2. Piirrä pylväsdiagrammi kahdeksan ensimmäisen vuoden vuosittaisista painumista. (4 p.)

Käsitelty geometrista lukujonoa, esimerkiksi  $a \cdot q^i, i = 0, 1, 2, \dots$  (Pelkkä kuvakaappaus kaavasta ei riitä.)

**Johtopäätöksenä:** Annettu ensimmäinen jäsen  $a \in [2,0 \text{ cm}; 3,0 \text{ cm}]$ .

Annettu suhdeluku  $q$ , jolle  $0 < q < 1$  (vähenevä geometrisen lukujono).

**riippumaton** Luvut  $a$  ja  $q$  toteuttavat ehdot (tarkistusta helpottava taulukko alla).

$$a = 2,0, \quad 0,607412 \leq q \leq 0,682328$$

$$a = 2,1, \quad 0,585826 \leq q \leq 0,66308$$

$$a = 2,2, \quad 0,564539 \leq q \leq 0,64421$$

$$a = 2,3, \quad 0,543502 \leq q \leq 0,625668$$

$$a = 2,4, \quad 0,522674 \leq q \leq 0,607412$$

1 p.

1 p.

1 p.

1 p.

$$a = 2,5, \quad 0,502017 \leq q \leq 0,589402$$

$$a = 2,6, \quad 0,481502 \leq q \leq 0,571605$$

$$a = 2,7, \quad 0,461104 \leq q \leq 0,553992$$

$$a = 2,8, \quad 0,440798 \leq q \leq 0,536538$$

$$a = 2,9, \quad 0,420568 \leq q \leq 0,51922$$

$$a = 3,0, \quad 0,400396 \leq q \leq 0,502017$$

ylläolevista riveistä riippumaton piste Osoitettu, että luvut  $a$  ja  $q$  toteuttavat ehdot:

Kahdeksanjäsenen geometrisen lukujonon summa on  $a \frac{1-q^8}{1-q}$  TAI

$$a + aq + aq^2 + aq^3 + aq^4 + aq^5 + aq^6 + aq^7.$$

Sijoitettu luvut TAI laskettu joku osasumma, joka on  $\geq 5,0$  cm.

Suoritettu laskutoimitus TAI laskettu summan yläraja  $\frac{a}{1-q}$ .

Tulos kuuluu välille  $[5,0 \text{ cm}; 6,0 \text{ cm}]$ .

#### Osatehtävän erillisohjeet

Annettu 8-jäseninen aidosti vähenevä lukujono, joka on silmämääräisesti geometrinen. Summa kuuluu välille  $[5,0 \text{ cm}; 6,0 \text{ cm}]$ . (0+0+0+0+1+1+1+1)

(1 p.)

1 p.

1 p.

1 p.

max 4 p.

Laskettu/poimittu ainakin kuusi osatehtävää 10.1 vastaavaa vuosittaista painumaa

**Johtopäätöksenä:** Piirretty pylväsdiagrammi.

Pylväitä on kahdeksan, joista jokainen vastaa osatehtävässä 10.1 laskettua vuosittaista painumaa.

Pylväät on merkitty (1–8) ja diagrammissa on otsikko tai selitetty, että pylväät kuvaavat vuosittaista painumaa senttimetreinä.

#### Osatehtävän erillisohjeet

$y$ -akselin selitykset puuttuvat. (1+1+1+0)

Alkupiste: Pylväsdiagrammi, jossa akselit on merkitty tai selitetty.

Omat virheelliset vuosittaiset arvot osatehtävästä 10.1

1 p.

1 p.

1 p.

1 p.

max 3 p.

1 p.

max 4 p.

## 11. Reunapalat 12 p.

Tuhannen palan palapelin koko on 70 cm  $\times$  50 cm. Arvioi, kuinka suuri osuus paloista on reunapaloja. Kirjoita näkyviin, mitä oletuksia arvioinnissasi teet.

Oletetaan, että palapelin palat ovat suorakulmioita.

Tarkastellaan seuraavaksi luvun 1000 hajotelmia kahden luvun tuloksi. Niistä hajotelmassa  $40 \cdot 25$  ovat tulontekijät lähinnä toisiaan. (Hajotelmat, joissa suhde  $< 3$  ja palojen lukumäärä 950–1050 kelpaavat, eli esimerkiksi  $20 \cdot 50$  ja  $27 \cdot 37$  käyvät.)

Laskettu palapelin sivujen pituuksien suhde  $\frac{70}{50} = 1,4$

ja palojen lukumäärien suhde ( $\frac{40}{25} = 1,6$ ).

Verrattu suhteita ja todettu tuottavan järkevän muotoisia paloja.

Reunapaloja on siis yhteensä  $40 \cdot 2 + 25 \cdot 2 - 4 = 126$ .

Paloista noin  $126/1000$  ( $\approx 13 \%$ ) TAI  $126/(\text{omien palojen lukumäärä})$  on siis reunapaloja. Vastauksen voi antaa murtolukuna tai desimaalilukuna.

2 p.

2 p.

(1 p.)

(1 p.)

2 p.

2 p.

2 p.

**Tämän ratkaisun erillisohjeet**

Oletettu sellainen palan koko (esimerkiksi 1 cm tai 2 cm sivultaan oleva neliö), että annetun kokoiseen palapeliin tulee yli 5 % väärä lukumäärä paloja. (2+0+0+0+0+2+2)

max 6 p.

TAI (vaihtoehtoinen ratkaisutapa)

Palapelin pinta-ala on  $50 \text{ cm} \cdot 70 \text{ cm} = 3500 \text{ cm}^2$ .

(1 p.)

Yhden palan pinta-ala on  $\frac{3500}{1000} = 3,5 \text{ cm}^2$ .

1 p.

**ylläolevista riveistä riippumaton piste** Oletetaan, että palapelin palat ovat neliöitä.

2 p.

Yhden palan sivun pituus on  $\sqrt{3,5} \approx 1,8708 \text{ cm}$ .

2 p.

**ylläolevista riveistä riippumaton piste** Palapelin piiri on  $2 \cdot (50 + 70) = 240 \text{ cm}$ .

1 p.

Reunapalojen lukumäärä on  $\frac{\text{piiri}}{\text{palan sivun pituus}} - 4 \approx \frac{240}{1,8708} - 4 \approx 124$

(jaettu piiri sivun pituudella (1 p.) ja kulmien huomioiminen oikein (1 p.)).

2 p.

**riippumaton** Selitys sille, että palapeli on realistinen.

1 p.

Paloista noin  $\frac{124}{1000}$  TAI 12 % on siis reunapaloja. (Murtoluku- tai desimaalilukuvastaus kelpaa.)

2 p.

**Tämän ratkaisun erillisohjeet**

Pinta-alamenetelmässä palojen lukumäärää rivillä ei tarvitse pyöristää kokonaisiksi paloiksi, mutta pyöristykset kokonaisiksi paloiksi hyväksytään.

Variantti  $3,5 \text{ cm}^2$  suorakaiteilla, joiden sivut 2 cm ja  $1,75 \text{ cm}$ .

max 12 p.

Variantti epätodellisen pitkulaisilla  $3,5 \text{ cm}^2$  suorakaiteilla (sivujen pituuksien suhde  $> 3$ , esimerkiksi  $1 \times 3,5$ ):  $1+1+0+1+1+2+0+2$  pistettä.

max 8 p.

**Tehtävän erillisohjeet**

Jos oletus suorakulmioista/neliöistä (1. ratkaisuvaihtoehdon rivi 1 / 2. ratkaisuvaihtoehdon rivi 3) ilmenee palan mitoista myöhemmin, mutta sanaa neliö/suorakulmio/suorakaide ei näy, annetaan kyseiseltä riviltä 1 piste.

Kulmapaloja ei ole huomioitu tai niiden vaikutus on väärin.

-1 p.

Viimeisen rivin pisteet voi saada, jos toiseksi (1. ratkaisuvaihtoehto)/kolmanneksi (2. ratkaisuvaihtoehto) viimeiseltä riviltä saa vähintään 1 pisteen. (Esimerkiksi "reunapaloja on 4 kpl"  $\rightarrow$  ei pisteitä, " $10 \times 100$  palaa"  $\rightarrow$  voi saada lopun pisteet.)

Eri oletukset (kuten palojen sivujen pituuksien suhteet) voivat johtaa erilaisiin lopputuloksiin. Jos kokelas on selittänyt hyvin oman palapelinsä, siitä voi saada 12 pistettä.

**12. Peruskoulujen lukumäärä Suomessa 12 p.**

Peruskoulujen lukumäärä Suomessa vuosina 2005–2020 on esitetty taulukossa 12.A.

1. Piirrä diagrammi, joka esittää peruskoulujen lukumäärät vuosina 2005–2020. (2 p.)

2. Sovita aineistoon regressiosuora  $y = a + bx$ , kun vuosi on  $x$ -akselilla ja peruskoulujen määrä  $y$ -akselilla. Selitä sanallisesti kertoimien  $a$  ja  $b$  merkitys. (4 p.)

3. Sovita aineistoon regressiosuora käyttäen vain vuosien 2005–2008 peruskoulujen lukumääriä. (2 p.)

4. Arvioi kummankin mallin perusteella vuosi, jolloin peruskoulut häviävät Suomesta. (4 p.)

Oikean suuntainen kaavio, jossa esitetty koulujen lukumäärän ja vuosilukujen riippuvuus, ja jossa saattaa olla pieniä virheitä. Esimerkiksi pyläs- tai palkkikaavio, viivakaavio, hajontakuvi.

(1 p.)

Oikein tehty diagrammi.

1 p.

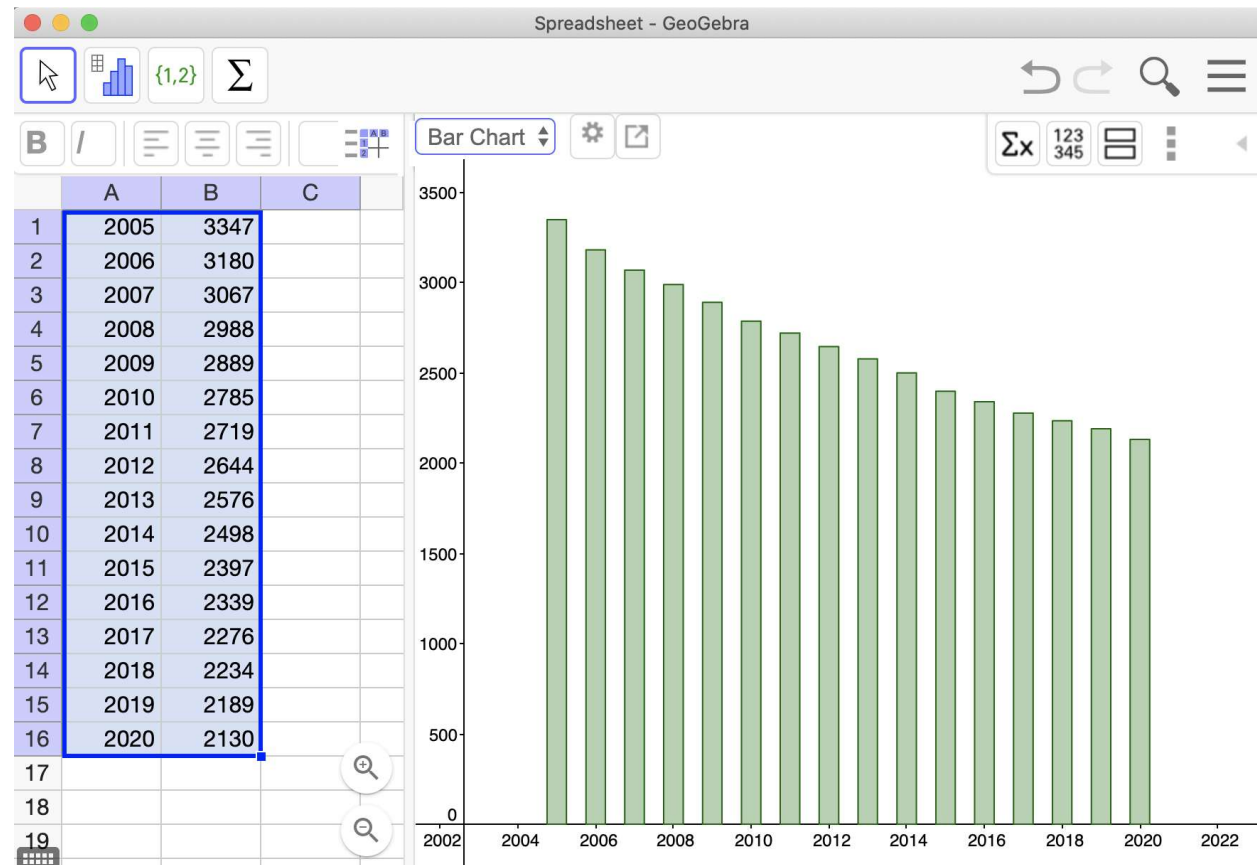
### Osatehtävän erillisohjeet

Asteikot puuttuvat (1+0).

max 1 p.

$y$ -akselin saa katkaista.

Alla on malliratkaisu GeoGebrasta. Taulukkoa ei vaadita.



Aineistoon sovitettu regressiomalli (ei välttämättä suora), joka silmämääräisesti vaikuttaa järkevältä, regressiomallin työkalu näkyy.

TAI

Aineistoon sovitettu suora (tai melkein suora), joka silmämääräisesti vaikuttaa regressiosuoralta (sovitus voi olla tehty myös silmämääräisesti).

TAI

Suora annettu yhtälönä, jossa kertoimet suunnilleen oikein (kulmakerroin  $\pm 10$  oikein ja vakiotermin  $\pm 10000$  oikein).

Regressiosuoran yhtälö annettu oikein. Riittää, että yhtälö on kuvakaappauksessa. Kaikki tarkkuudet käyvät. ( $y = -78,2794x + 160\,178,4412$ )

**riippumaton** Kulmakertoimen  $b$  merkitys selitetty oikein eli liitetty koulujen lukumäärän muutosnopeuteen.

**riippumaton** Vakiotermin  $a$  merkitys selitetty oikein eli suunnilleen koulujen lukumäärä vuonna 0.

### Osatehtävän erillisohjeet

Molemmat kertoimet  $a$  ja  $b$  selitetty, mutta väärinpäin.

max 3 p.

Alla oikea esimerkki GeoGebran käytöstä. Taulukkoa ei vaadita.

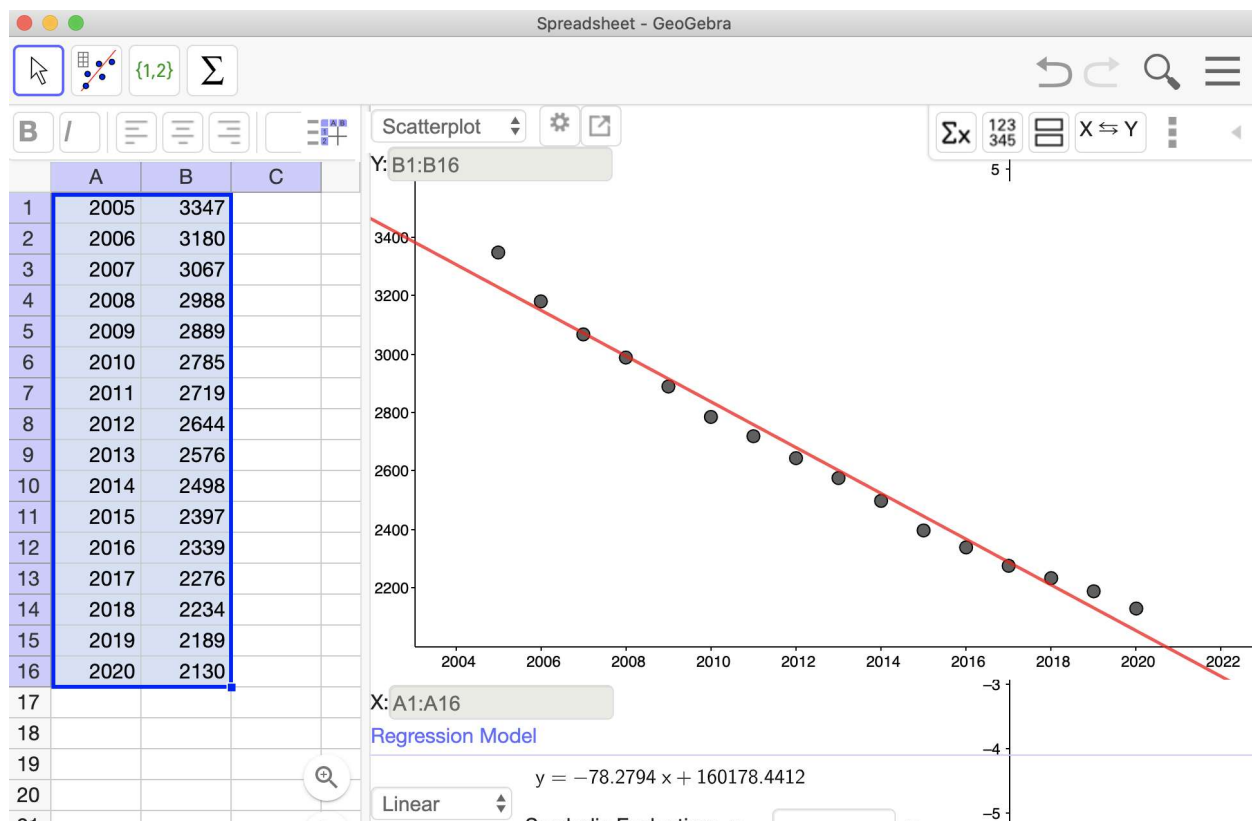
1 p.

1 p.

1 p.

1 p.





Sovitus ei regressio (esimerkiksi ensimmäisen ja viimeisen pisteen kautta)

+0 p.

Aineistoon sovitettu regressiomalli (ei välttämättä suora), joka silmämääräisesti vaikuttaa järkevältä, regressiomallin työkalu näkyy.

TAI

Aineistoon sovitettu suora (tai melkein suora), joka silmämääräisesti vaikuttaa regressiosuoralta (sovitus voi olla tehty myös silmämääräisesti).

(1 p.)

TAI

Suora annettu yhtälönä, jossa kertoimet suunnilleen oikein (kulmakerroin  $\pm 10$  oikein ja vakiotermin  $\pm 10000$  oikein).

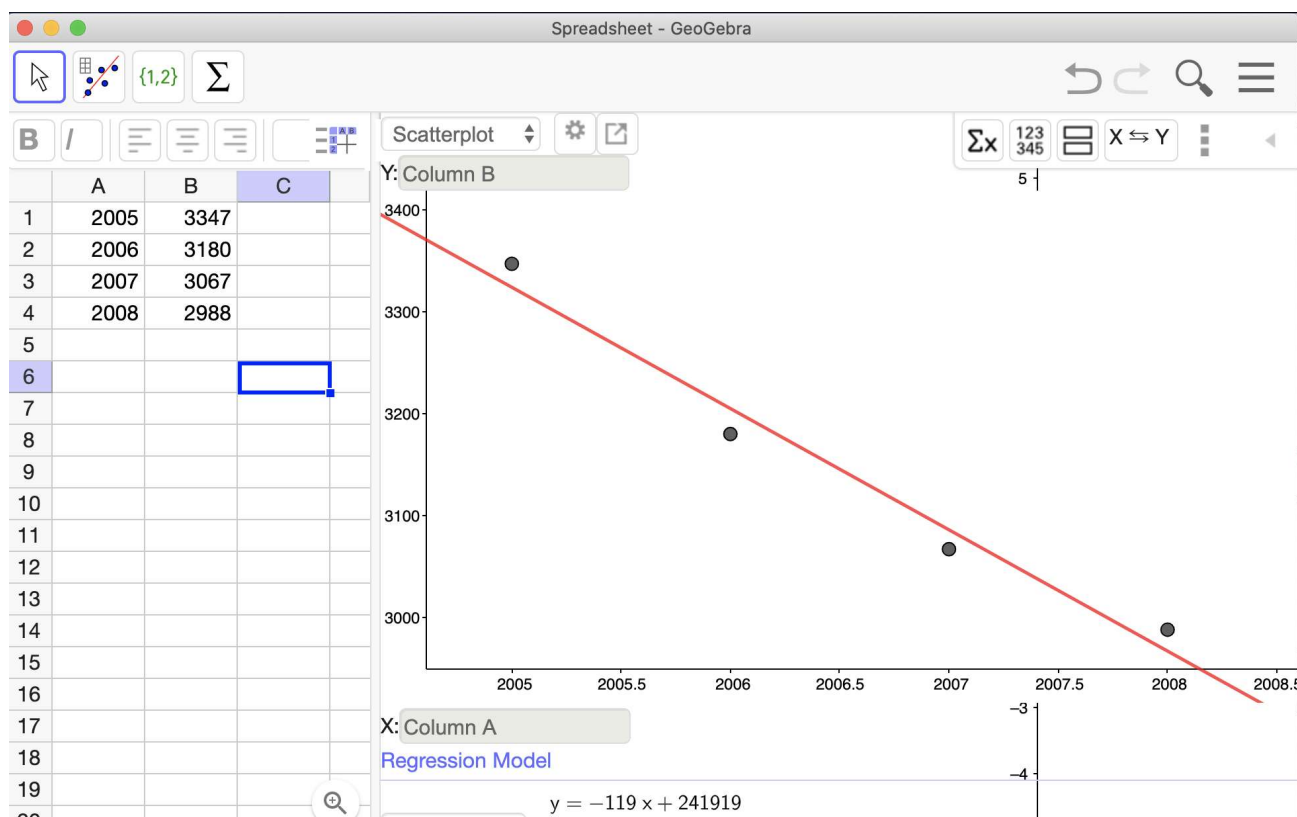
Regressiosuoran yhtälö annettu oikein. Riittää, että yhtälö on kuvakaappauksessa. Kaikki tarkkuudet käyvät. ( $y = -119x + 241\,919$ )

1 p.

### Osatehtävän erillisohjeet

Sovitus ei regressio (esimerkiksi ensimmäisen ja viimeisen pisteen kautta)

+0 p.



**riippumaton** Laajemmalla mallilla oikein 2046 TAI 2047 (jos akselit toisinpäin, niin 2045 TAI 2046).

Perustelu oikein

**riippumaton** Suppeammalla mallilla oikein 2032 TAI 2033. (jos akselit toisinpäin niin 2032 tai 2033)

Perustelu oikein

### Osatehtävän erillisohjeet

Esimerkiksi suppeammasta mallista:  $-119x + 241\,919 = 0$ , jolloin saadaan  $x \approx 2032,9$ .

Esimerkiksi laajemmasta mallista:  $-78,2794x + 160178,4412 = 0$ , jolloin saadaan  $x \approx 2046,24$ .

Pisteet saa myös osatehtävistä 2 ja 3 periytyneillä väärillä lineaarisilla malleilla.

max 4 p.

Vuoden voi määrittää osoittamalla, että funktion merkki vaihtuu kahden vuoden välissä, tai katsoa kuvaajasta, jos kuvaajalla on tasavuositainen asteikko ja leikkauspisteen sijainti jää selvästi kahden peräkkäisen vuoden väliin.

Epälineaarilla mallilla ei tästä kohdasta pisteitä.

+0 p.

### Tehtävän erillisohjeet

Jos  $x$ -akseli on siirretty arvoihin 1–16 ja vastaavuus selitetty järkevästi, niin max 12 p. Jos ei selitetty, niin max 1+0 / 4 / 2 / 0+1+0+1.

Osatehtävissä 12.2–12.4:  $x$ - ja  $y$ -akselit toisinpäin: regressiosuorat  $y = -0.0082x + 2032.2222$  ja  $y = -0.0125x + 2045.6747$ . Tällöin voi saada seuraavat pisteet:

12.2: 1+0+1+1

12.3: 1+1

12.4: 1+1+1+1.

## 13. Kuvaajat ja derivaatta 12 p.

Funktioista  $f$  ja  $g$  tiedetään, että  $f(0) = 0$  ja  $g(0) = 5$  sekä

$$2 \leq f'(x) \leq 3 \quad \text{ja} \quad 1 \leq g'(x) \leq 2$$

kaikilla  $x$ .

- Oletetaan, että funktioiden  $f$  ja  $g$  kuvaajat ovat suoria. Perustele graafisesti tai laskemalla, että  $4 \leq f(2) \leq 6$  ja  $7 \leq g(2) \leq 9$ . (6 p.)
- Oletetaan, että funktioiden  $f$  ja  $g$  kuvaajat eivät välttämättä ole suoria. Mitkä seuraavista tilanteista ovat mahdollisia:
  - $f(2) = g(2)$
  - $f(2) < g(2)$
  - $f(2) > g(2)$

Voit hyödyntää perustelussasi seuraavaa tietoa:

Jos kahdella funktiolla on sama arvo kohdassa 0 ja toisen funktion derivaatta on suurempi välillä  $[0, 2]$ , niin tämän funktion arvo on suurempi kohdassa 2. (6 p.)

**riippumaton** Todettu eksplisiittisesti, että jos funktion  $f$  (samoin funktion  $g$ ) kuvaaja on suora, niin sen kulmakertoimen  $k$  arvo on sama kuin sen derivaatta.

1 p.

Näin ollen, jos  $f(0) = 0$ , niin funktion lauseke on muotoa  $f(x) = kx$ .

1 p.

Siispä  $f(2) = k \cdot 2 \leq 3 \cdot 2 = 6$  ja  $f(2) = k \cdot 2 \geq 2 \cdot 2 = 4$ .

2 p.

Funktion  $g$  tapauksessa vastaavasti, jos  $g(0) = 5$ , niin  $g(x) = kx + 5$ ,

1 p.

ja voidaan arvioida  $g(2) = 2k + 5 \leq 2 \cdot 2 + 5 = 9$  sekä  $g(2) \geq 1 \cdot 2 + 5 = 7$ .

1 p.

TAI graafinen ratkaisu

**riippumaton** Todettu eksplisiittisesti, että jos funktion  $f$  (samoin funktion  $g$ ) kuvaaja on suora, niin sen kulmakertoimen  $k$  arvo on sama kuin sen derivaatta.

1 p.

Kuvassa ovat suorat  $y = 2x$  ja  $y = 3x$  ainakin välillä  $[0, 2]$ .

2 p.

Nähdään, että  $f(2) \leq 6$  ja  $f(2) \geq 4$ .

1 p.

Kuvassa ovat suorat  $y = x + 5$  ja  $y = 2x + 5$  ainakin välillä  $[0, 2]$ .

1 p.

Nähdään, että  $g(2) \leq 9$  ja  $g(2) \geq 7$ .

1 p.

Hyödynnetään tehtävässä olevaa lisätietoa. Koska funktion  $f$  derivaatta on rajoitettu välille  $[2, 3]$ , ovat funktion  $f$  arvot korkeintaan yhtä suuria kuin funktion  $f_1(x) = 3x$  arvot ja vähintään yhtä suuria kuin funktion  $f_2(x) = 2x$  arvot.

2 p.

Arvot on siis rajoitettu samoin kuin ensimmäisen kohdan suorilla. Vastaava pätee funktioon  $g$ .

1 p.

Voidaan siis lukea vastaukset suoraan ensimmäisestä kohdasta:

$f(2) = g(2)$  ei ole koskaan mahdollinen.

1 p.

$f(2) < g(2)$  on mahdollinen (toteutuu aina).

1 p.

$f(2) > g(2)$  ei ole koskaan mahdollinen.

1 p.

**Osatehtävän erillisohjeet**

Pelkät oikeat vastaukset.

+0 p.

Tilanteen  $f(2) < g(2)$  perusteluksi riittää vetoaminen osatehtävään 13.1.

Ensimmäiseltä riviltä voi antaa yhden pisteen, jos on yritetty selittää ja selitys on oikeansuuntainen, mutta hutera.